

学術論文 | Article |
(査読付) | (Refereed) |

主成分分析に基づく残差周波数変換 による高精細画像の再構成

木村悠登・森田雅貴

High Resolution Image Reconstruction by
PCA-based Residual Frequency Transforma-
tion

By Yuto KIMURA and Masaki MORITA

主成分分析に基づく残差周波数変換 による高精細画像の再構成

木村悠登[†]・森田雅貴^{††}

High Resolution Image Reconstruction by PCA-based Residual Frequency Transfor- mation

By Yuto KIMURA and Masaki MORITA

Abstract

The residual frequency transformation decomposes the input data (e.g. image data) into two components: a prediction function and the residual. The prediction function is subtracted from the input data to obtain the residual, whose Fourier series expansion has quickly decaying frequency components. In this paper we consider a prediction function with constant gradient in a particular direction. This prediction function can entirely eliminate the residual under the assumption that there exists a direction in which the directional derivative of the input data is constant. This assumption is of course unrealistic. Then in this paper, the prediction based on constant gradient is applied in the direction determined by PCA to minimize the variance of the directional derivative of the input data.

1. はじめに

閉区間 $[0,1]$ で定義された $[0,1]$ で絶対積分可能, すなわち $\int_0^1 |f(x)| dx < \infty$ である関数 f に対し, $f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im2\pi x}$ をフーリエ級数, $c_m = \int_0^1 f(x) e^{-im2\pi x} dx$ をフーリエ係数という. いま, フーリエ級数 $f(x) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im2\pi x}$ の最初の M 項までの部分和から関数 f を近似することを考えると, その際の近似精度は切り捨てられた M 項以降のフーリエ係数 $c_m (|m| > M)$ の大きさに大きく依存する. 関数 f の $|m| \rightarrow \infty$ に対するフーリエ係数 c_m の減衰速度が速く, 切り捨てられる係数の大きさが小さければ, フーリエ級数の近似精度は向上する.

関数 f は十分滑らかなものとし, フーリエ係数 $c_m = \int_0^1 f(x) e^{-im2\pi x} dx$ の積分項に k 回だけ部分積分を適用すると

$$c_m = - \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{im2\pi} \right)^{(j+1)} (f^{(j)}(1) - f^{(j)}(0)) + \left(\frac{1}{im2\pi} \right)^k \int_0^1 f^{(k)}(x) e^{-im2\pi x} dx \quad (1)$$

と表せる. ただし, $f^{(k)}(x)$ は $f(x)$ の k 階導関数を表す. 関数 f の k 階導関数 $f^{(k)}(x)$ が有界変動関数である場合, Taibleson の定理から¹⁾, $|m| \rightarrow \infty$ に対して

$$\int_0^1 f^{(k)}(x) e^{-im2\pi x} dx = O(m^{-1})$$

なので

$$c_m = - \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{im2\pi} \right)^{(j+1)} (f^{(j)}(1) - f^{(j)}(0)) + O(m^{-1-k})$$

を得る. 特に, 両端点における $f(x)$ の導関数について $f^{(j)}(0) = f^{(j)}(1)$, $j = 0, 1, \dots, k-1$ であれば $c_m = O(m^{-1-k})$ となる. したがって, もし区間の両端点の関数値, 及び, 1階導関数の値が等しければ, そのような関数 f に対するフーリエ係数 c_m は少なくとも $c_m = O(m^{-3})$ のオーダーで減衰していくこととなる.

さらに, 区間 $[0,1]$ の両端点の関数値が0, すなわち $f(0) = f(1) = 0$ となるような関数 f について考えてみる. 関数 f を x 軸の負の方向に延長し, 定義域を $[-1,1]$ に拡張したものを

[†] 名城大学大学院都市情報学研究科

^{††} 名城大学都市情報学部

$$\hat{f}(x) := \begin{cases} f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ -f(-x), & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

とする。ここで $f(0)=f(1)=0$ より、 $\hat{f}$ が区間 $[-1,1]$ の両端点で同じ値をとることは明らかである。また、 $-1 \leq x < 0$ に対し $\hat{f}'(x) = f'(-x) = \hat{f}'(-x)$ となることに注意すると、 $\hat{f}$ が $\hat{f}'(-1) = \hat{f}'(1)$ を満たすことは明らかであり、 $\hat{f}$ のフーリエ係数が $\hat{c}_m = O(m^{-3})$ のオーダーで減衰していくことが分かる。

ある区間で関数 f が与えられたとき、両端点の関数値が0となるのは特殊なケースであり、この条件は一般的な状況には該当しない。そこで、関数 f それ自体のフーリエ係数を考えるのではなく、少なくとも区間の両端点で関数 f の関数値と一致する適当な関数 u を構成し、関数 f から u を差し引いて残った残差関数 $r := f - u$ のフーリエ係数を考える方法が提案されている²⁾。残差 r の区間端点における値は両端点とも0なので、そのフーリエ係数の減衰速度はオーダー $O(m^{-3})$ で与えられる。以下では、このように残差に対して周波数変換を適用する方法を残差周波数変換ということにする。

これまでは1変数関数 f の残差周波数変換について述べてきたが、2変数以上の関数についても同様の議論が成立する。2変数以上の関数に対する残差周波数変換としては、領域 Ω で定義された関数 f に対し、Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega; \quad u = f \text{ on } \partial\Omega$$

の解 u 、すなわち、境界上で関数 f に一致する調和関数 u による残差 $r (= f - u)$ に着目する残差周波数変換が提案されている³⁾。調和関数 u は境界条件 $u = f$ の Dirichlet 境界値問題の解であり、残差 r の境界 $\partial\Omega$ における値は0となり、 f 自体に比べ、残差のフーリエ係数の減衰速度は加速される³⁾。

本論文では、残差 r の生成に際し、境界値を0とした場合、すなわち、両端点の関数値、及び、1階導関数の値が等しくなるように残差を生成した場合、(1) 式の積分項が

$$\left| \int_0^1 r''(x) e^{-im2\pi x} dx \right| \leq \max_{0 \leq x \leq 1} |r''(x)|$$

で抑えられることに着目する (2変数関数についても同様のことが言える)。領域内部の関数 f の幾何学的特徴を少しでも予測関数 u に反映させることができれば、境界値を0にするだけの処理に比べ、領域内部でよりフラットな (2階偏導関数の小さな) 残差 r が期待でき、残差フーリエ係数の減衰速度をさらに加速することが可能となるかもしれないというのが本アイデアの根拠である。予測関数 u については、境界上の f の値を線形に補間することによって構成することを考える。すなわち、境界上の異なる2点を直線で結び、その直線上の f を境界上の2点における境界値から線形に補間する。このとき問題になるのは、境界上の2点をどのような方向に結び付けるのかである。線形補間の適用を考えると、補間直線に沿った f の方向微分はできるだけ一定になることが望ましい。そこで、本論文では、当該領域における f の勾配に主成分分析を適用し⁴⁾、 f の方向微分の分散が最小になる方向に線形補間を適用することを提案する。

本論文の構成について述べる。2章では、 f の勾配に主成分分析を適用し、 f の方向微分の分散が最小になる方向をどのように見つけるかについて詳細に述べる。3章では、予測関数 u の構成方法について述べるとともに、簡単な数値シミュレーションによって、その予測性能を検証した結果についても述べる。4章では、種々の特徴をもった高精細なデジタル画像を用いて、提案する境界値から線形補間によって再構成した画像を主観的に評価する。また、再構成した画像に対する残差周波数変換について述べ、その変換係数の減衰速度を数値的に評価する。

2. 勾配データに対する主成分分析

本章では、入力された2変数関数 f の勾配ベクトルに主成分分析を適用し、関数 f の方向微分の分散が最小となる方向を特定する方法について述べる。

2.1 考えたい問題

xy 平面上の有界な領域 Ω で定義された滑らかな関数 $f(x,y)$ について考える。関数 $f(x,y)$ の勾配 $\nabla f(x,y)$ とは、 x 軸、 y 軸それぞれの方向への偏微分係数 $f_x(x,y)$ 、 $f_y(x,y)$ から決まる下のベクトルのことである。

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

勾配 $\nabla f(x,y)$ と角 $(0 \leq \phi \leq \pi)$ を成す単位ベクトルを $\mathbf{e} = (e_x, e_y)$ とすると、ベクトル $\mathbf{e}$ 方向の $f(x,y)$ の方向微分、傾きは、

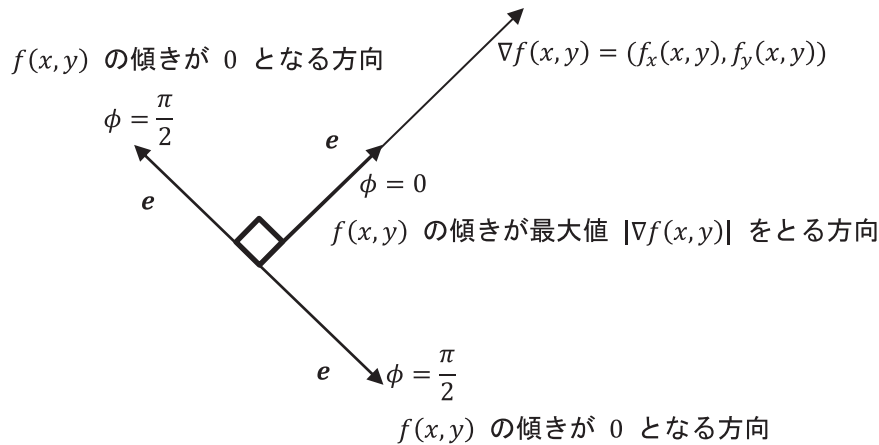
$$\begin{aligned} \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{e} &= f_x(x,y)e_x + f_y(x,y)e_y \\ &= |\nabla f(x,y)| \cos \phi \end{aligned}$$

と表される。このとき $|\nabla f(x,y)| = 0$ なら任意の ϕ についての傾きはすべて0、また、 $|\nabla f(x,y)| \neq 0$ なら $\phi = 0$ 、すなわち $\nabla f(x,y)$ と同方向で最大値 $|\nabla f(x,y)|$ をとり、 $\phi = \frac{\pi}{2}$ 、すなわち $\nabla f(x,y)$ の直交方向で傾きは0となる (図1参照)。したがって、 xy 平面上である方向を向いたときの関数 $f(x,y)$ の傾きがどのように変化するかを知るには、偏微分係数 $f_x(x,y)$ 、 $f_y(x,y)$ を調べれば良いということが分かる。

本章の目的は、領域 Ω において、 $f(x,y)$ の方向微分 $\nabla f(x,y) \cdot \mathbf{e}$ のばらつきが最も大きくなる方向、最も小さくなる方向を見つけることである。これは、領域 Ω に含まれる勾配 $\nabla f(x,y)$ の分布に対して主成分分析を適用することで実現できる。ある方向ベクトル $\mathbf{e} = (e_x, e_y)$ に対し、領域 Ω 全体から偏りなく無数に方向微分 $\nabla f(x,y) \cdot \mathbf{e}$ を取り出した場合の分散は

$$\begin{aligned} V(e_x, e_y) &:= \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} \left(\nabla f(x,y) \cdot \mathbf{e} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} (\nabla f(x,y) \cdot \mathbf{e}) dx dy \right)^2 dx dy \end{aligned}$$

で与えられる⁵⁾ (領域 Ω の面積を $|\Omega|$ と表記していることに注意)。ここで $g(e_x, e_y) := e_x^2 + e_y^2 - 1$ とおき、ラグランジュの未

図1: e と $\nabla f(x, y)$ の成す角 ϕ に対する e 方向の $f(x, y)$ の傾き

定乗数法を用いると, $g(e_x, e_y) = 0$ を満たす e の中で (単位ベクトルの中で) 分散 $V(e_x, e_y)$ を最大, 最小とする e は, 適当な定数 λ に対して

$$\left(\frac{\partial}{\partial e_x}, \frac{\partial}{\partial e_y} \right) V(e_x, e_y) = \lambda \left(\frac{\partial}{\partial e_x}, \frac{\partial}{\partial e_y} \right) g(e_x, e_y)$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{xy} & s_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix}$$

を満足する. ただし, s_{xx} , s_{yy} , s_{xy} はそれぞれ偏微分係数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ の分散, 共分散であり, $\bar{f}_x = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} f_x(x, y) dx dy$, $\bar{f}_y = \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} f_y(x, y) dx dy$ とすると

$$s_{xx} := \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} (f_x(x, y) - \bar{f}_x)^2 dx dy,$$

$$s_{yy} := \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} (f_y(x, y) - \bar{f}_y)^2 dx dy,$$

$$s_{xy} := \frac{1}{|\Omega|} \iint_{\Omega} (f_x(x, y) - \bar{f}_x)(f_y(x, y) - \bar{f}_y) dx dy$$

である. 単位行列を I とすると, 分散行列

$$\Sigma := \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} \\ s_{xy} & s_{yy} \end{pmatrix}$$

は実対称行列なので, 固有方程式 $|\Sigma - \lambda I| = 0$ の判別式は

$$D = (s_{yy} - s_{xx})^2 + 4s_{xy}^2 \geq 0$$

となる. まず, $D = 0$ のときは, $|\Sigma - \lambda I| = 0$ が重解を持つので, 任意の e 方向に対する分散 $V(e_x, e_y)$ の最大, 最小値は一致し, どの方向を選択しても分散の値は変わらない. 例えば, 関数 $f(x, y)$ が平面のような特殊な形状を持つ場合などがこのケースに該当する. 次に, $D > 0$, すなわち, $s_{xy} \neq 0$ または $s_{xx} \neq s_{yy}$ の場合, 分散 $V(e_x, e_y)$ を最大, 最小とする e は, それぞれ Σ の固有値

$$\lambda_1 = \frac{s_{xx} + s_{yy} + \sqrt{D}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{s_{xx} + s_{yy} - \sqrt{D}}{2}$$

に対する固有ベクトル

$$e_1 = \pm \frac{v_1}{|v_1|}, \quad e_2 = \pm \frac{v_2}{|v_2|}$$

として与えられる (主成分分析における第一主成分方向と第二主成分方向). ただし,

$$v_1 = \begin{cases} (s_{xy}, \lambda_1 - s_{xx}), & (s_{xx} \leq s_{yy}) \\ (\lambda_1 - s_{yy}, s_{xy}), & (s_{xx} > s_{yy}) \end{cases},$$

$$v_2 = \begin{cases} (\lambda_2 - s_{yy}, s_{xy}), & (s_{xx} \leq s_{yy}) \\ (s_{xy}, \lambda_2 - s_{xx}), & (s_{xx} > s_{yy}) \end{cases}$$

である. ここで, $D > 0$ のとき, 分散 $V(e_x, e_y)$ が $e = e_1$ で最大となることに注意し,

$$\theta^* = \begin{cases} 0, & (D = 0) \\ \arccos(e_x^*), & (D > 0) \end{cases}$$

と定義する. ただし e_x^* は第一主成分方向 e_1 の x 座標を表すものとする. 分散 $V(e_x, e_y)$ は $e = (\cos \theta^*, \sin \theta^*)$ で最大, $e = (\sin \theta^*, -\cos \theta^*)$ で最小となる.

2.2 勾配データの近似

次に, 関数 $f(x, y)$ がサンプリングデータとして離散的に与えられた場合に, 偏微分係数 $f_x(x, y)$, $f_y(x, y)$ をどのように近似するかについて考える. ここからは Ω を一辺1の正方形閉領域

$$\Omega = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

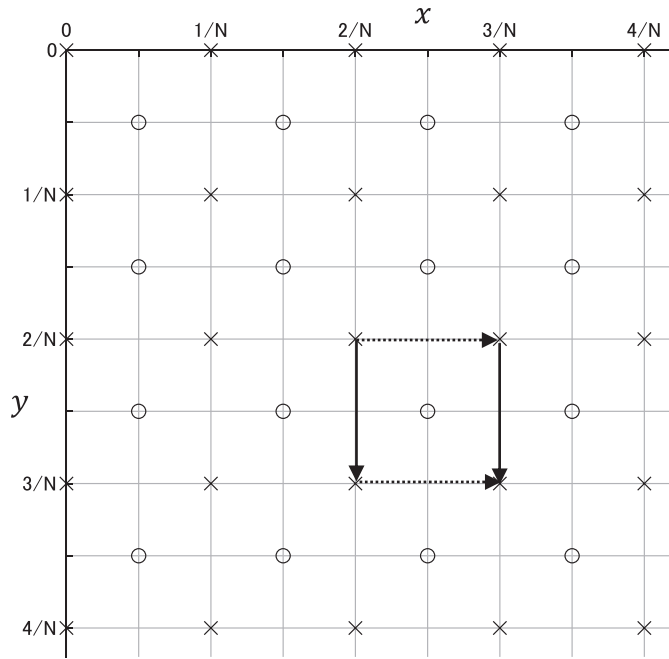
と再定義し, 間隔 h で一様に配置された $(N+1) \times (N+1)$ 個の点

$$(x, y) = (ih, jh), \quad h = \frac{1}{N}, \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

において, 関数 $f(x, y)$ のサンプリングデータ

$$f^{(i,j)} := f(ih, jh), \quad i, j = 0, 1, \dots, N$$

が与えられているものとする. ただし, $N > 0$ である. 本論文では, 図2に示すように, 隣接する4個のサンプリング点の中央に



$\times : (ih, jh)$

関数 $f(x, y)$ のサンプリング点

$\circ : (x_i, y_j) := \left(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{h}{2} \right),$
 $i, j = 0, 1, \dots, N-1$

偏微分係数 $f_x(x_i, y_j)$, $f_y(x_i, y_j)$ を近似する点. 点線矢印, 直線矢印それぞれの平均によって, (x_i, y_j) における偏微分係数の近似値 $f_x^{(i,j)}$ と $f_y^{(i,j)}$ を定義する.

図2: 領域 Ω における偏微分係数の近似方法

位置する $N \times N$ 個の点

$$(x_i, y_j) := \left(ih + \frac{h}{2}, jh + \frac{h}{2} \right), \quad i, j = 0, 1, \dots, N-1$$

における偏微分係数を, それぞれ4個のサンプリングデータ $f^{(i,j)}, f^{(i+1,j)}, f^{(i,j+1)}, f^{(i+1,j+1)}$ から以下の中心差分で近似するものとする⁶⁾.

$$f_x(x_i, y_j) \simeq f_x^{(i,j)} := \frac{f^{(i+1,j)} - f^{(i,j)} + f^{(i+1,j+1)} - f^{(i,j+1)}}{2h},$$

$$f_y(x_i, y_j) \simeq f_y^{(i,j)} := \frac{f^{(i,j+1)} - f^{(i,j)} + f^{(i+1,j+1)} - f^{(i+1,j)}}{2h}$$

これらの偏微分係数の近似 $f_x^{(i,j)}, f_y^{(i,j)}$ から, 点 (x_i, y_j) における勾配の近似

$$\nabla f(x_i, y_j) \simeq \nabla f^{(i,j)} := (f_x^{(i,j)}, f_y^{(i,j)})$$

を得る.

勾配近似 $\nabla f^{(i,j)}$ を用いると, 点 (x_i, y_j) における方向微分は $\nabla f^{(i,j)}$ の $\mathbf{e}$ 方向成分

$$\nabla f^{(i,j)} \cdot \mathbf{e} = f_x^{(i,j)} e_x + f_y^{(i,j)} e_y, \quad i, j = 0, 1, \dots, N-1$$

になるので, この場合の方向微分の標本分散は次式で与えられる.

$$\tilde{V}(e_x, e_y) := \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(\nabla f^{(i,j)} \cdot \mathbf{e} - E(\nabla f^{(i,j)} \cdot \mathbf{e}) \right)^2$$

ただし, $E(\nabla f^{(i,j)} \cdot \mathbf{e}) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} (\nabla f^{(i,j)} \cdot \mathbf{e})$ とする. ここで, 前節と同様に $f_x^{(i,j)}, f_y^{(i,j)}$ の標本分散, 標本共分散

$$S_{xx} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f_x^{(i,j)} - \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_x^{(i,j)} \right)^2,$$

$$S_{yy} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f_y^{(i,j)} - \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_y^{(i,j)} \right)^2,$$

$$S_{xy} = \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} \left(f_x^{(i,j)} - \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_x^{(i,j)} \right) \left(f_y^{(i,j)} - \frac{1}{N^2} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} f_y^{(i,j)} \right)$$

を求め, 分散行列 $\begin{pmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{pmatrix}$ の最大固有値 $\tilde{\lambda}_1$ に対する固有ベクトル (第一主成分方向)

$$\mathbf{e}_1 = \pm \frac{\tilde{\mathbf{v}}_1}{|\tilde{\mathbf{v}}_1|}, \quad \tilde{\mathbf{v}}_1 = \begin{cases} (S_{xy}, \tilde{\lambda}_1 - S_{xx}), & (S_{xx} \leq S_{yy}) \\ (\tilde{\lambda}_1 - S_{yy}, S_{xy}), & (S_{xx} > S_{yy}) \end{cases}$$

を用いて

$$\tilde{\theta}^* = \begin{cases} 0, & (D = 0) \\ \arccos(e_x^*), & (D > 0) \end{cases}$$

と定義する. このとき, 勾配近似を用いた場合の方向微分の標本分散 $\tilde{V}(e_x, e_y)$ は $\mathbf{e} = (\cos \tilde{\theta}^*, \sin \tilde{\theta}^*)$ で最大, $\mathbf{e} = (\sin \tilde{\theta}^*, -\cos \tilde{\theta}^*)$ で最小となる.

2.3 $\hat{\theta}^*$ の近似精度に関する数値例

本節では $\hat{\theta}^*$ の近似精度に関する数値例について述べる。関数 $f(x,y)$ としては、図3に示す3種類の関数 (a)Step, (b)Wave, (c) Texture を用いる。図3のいずれの例も、 $\theta^* = \frac{\pi}{6}$ となるように設定してある。

図4は、Step, Wave, Texture に対してサンプリング点数を $N = 8, 16, 32, 64$ の4通りにとったときの $\hat{\theta}^*$ を計算し、それぞれの近似精度を横軸 N の片対数グラフにプロットしたものである。図4より、Step, Wave, Texture のどの場合においても $\hat{\theta}^*$ の近似精度はサンプリング点の個数を増やすほど精度が良くなっていることが見て取れる。これは、サンプリング点を増やすことで勾配を近似する2点間の距離が小さくなったためと考えられる。また、最大でも θ^* と $\hat{\theta}^*$ の誤差が $\frac{1}{10}$ 、つまり $\frac{1}{10}\pi$ 程度の角度の差で抑えられていることが分かる。さらに、関数 $f(x,y)$ の特徴ごとに $\hat{\theta}^*$ の近似精度を見ると、Step の近似精度が最も高く Texture が最も低いことが見て取れる。

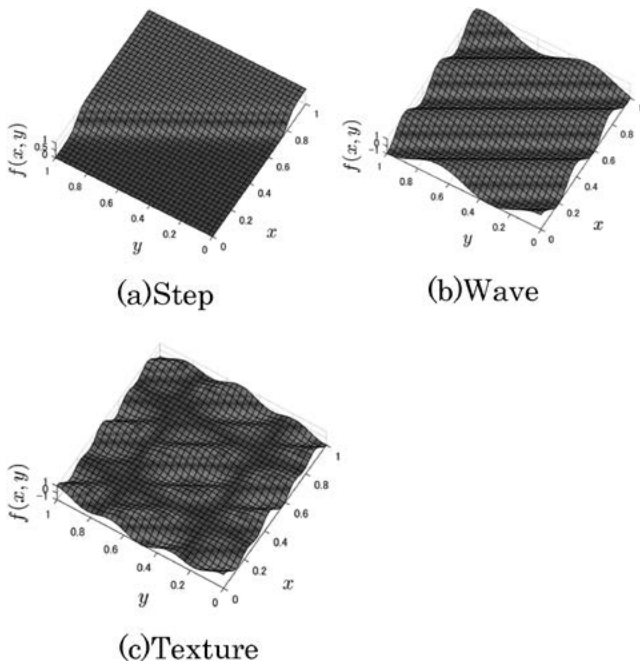


図3: $\hat{\theta}^*$ の近似精度の確認に用いた関数

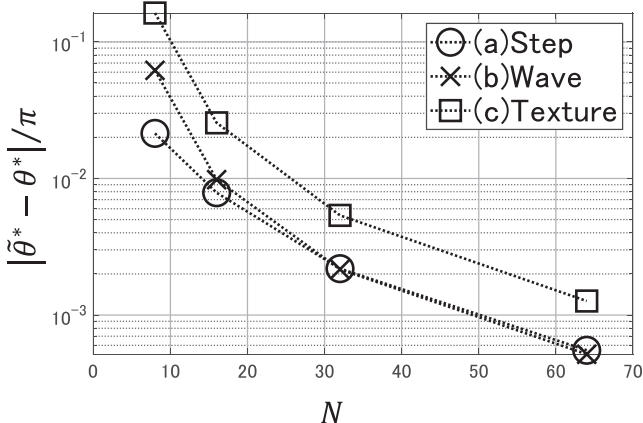


図4: $\hat{\theta}^*$ の近似精度

3. 関数値の推定

本章では、領域 Ω 内のサンプリング点の関数値 $f^{(i,j)}$ を予測する方法について述べる。

3.1 問題

2.2節と同様に、 Ω を一辺1の正方形閉領域とし、間隔 $h (= \frac{1}{N})$ で一様に配置された $(N+1)^2$ 個の点 $(x,y) = (ih, jh)$, $i, j = 0, 1, \dots, N$ における関数 $f(x,y)$ の値を $f^{(i,j)}$ とする。ただし、以下では、領域 Ω の内部に配置された関数値 $f^{(i,j)}$, $i, j = 1, \dots, N-1$ については未知とし、境界上に配置された

$$(x,y) = \begin{cases} (X_k, Y_k) := (kh, 0) \\ (X_{N+k}, Y_{N+k}) := (1, kh) \\ (X_{2N+k}, Y_{2N+k}) := (h + kh, 1) \\ (X_{3N+k}, Y_{3N+k}) := (0, h + kh) \end{cases}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

における $f(x,y)$ の値

$$b_n := f(X_n, Y_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots, 4N-1$$

に限り観測されるものとする (図5参照)。本章では、方向微分 $\nabla f^{(i,j)} \cdot \mathbf{e}$ の分散を最大、最小とする方向ベクトルを利用し、境界値 b_n , $n = 0, 1, \dots, 4N-1$ から、領域 Ω 内部の未知の関数値 $f^{(i,j)}$, $i, j = 1, \dots, N-1$ を推定することを考える。

3.2 $f^{(i,j)}$ の推定

本節では、領域 Ω 内の未知の関数値 $f^{(i,j)}$, $i, j = 1, \dots, N-1$ の推定方法について述べる。まず、 θ を $0 \leq \theta < \pi$ を満たす方向にとり、互いに直交する単位ベクトルを

$$\begin{cases} (s_x, s_y) := (\cos \theta, \sin \theta) \\ (t_x, t_y) := (\sin \theta, -\cos \theta) \end{cases}$$

とする。後の線形補間の計算を簡単にするため、 $(x,y) = (ih, jh)$ を原点とし、 (s_x, s_y) 方向に s 軸を、 (t_x, t_y) 方向に t 軸をとる。すなわち、

$$\begin{cases} s = (x - ih, y - jh) \cdot (s_x, s_y) \\ \quad = (x - ih)s_x + (y - jh)s_y \\ t = (x - ih, y - jh) \cdot (t_x, t_y) \\ \quad = (x - ih)t_x + (y - jh)t_y \end{cases}$$

直交座標 (s,t) を用いると、推定対象の $f^{(i,j)}$ の位置 $(x,y) = (ih, jh)$ は原点 $(s,t) = (0,0)$ となり、境界値の位置 (X_n, Y_n) は、 $(s,t) = (s_n, t_n) := ((X_n - ih)s_x + (Y_n - jh)s_y, (X_n - ih)t_x + (Y_n - jh)t_y)$ と表される。前章で述べたように、もし方向微分の分散が最大になるように s 軸をとれば、すなわち $\theta = \theta^*$ なら、領域 Ω における方向微分の分散は t 軸方向を向いたときに最小となる。ここでは、原点 $(f^{(i,j)})$ の位置を囲む4つの境界値を t 軸方向に線形に変化する関数で補間し、この補間関数を用いて $f^{(i,j)}$ を推定する方法を提案する⁷⁾。

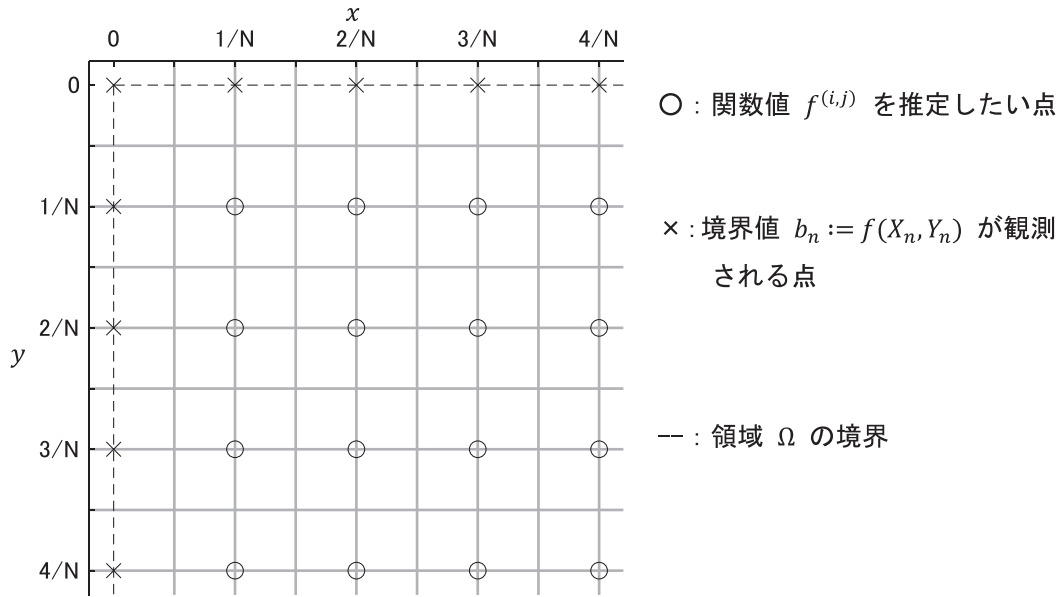


図5：境界値 b_n の観測点と関数値 $f^{(i,j)}$ を推定したい点の配置

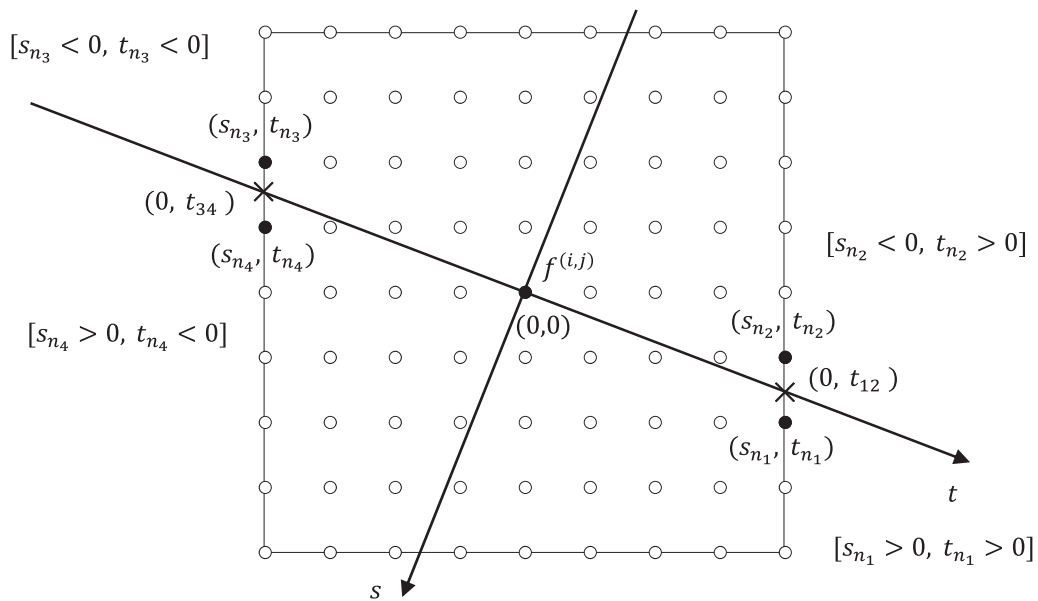


図6： s, t 軸に対する点 (s_{n_1}, t_{n_1}) , (s_{n_2}, t_{n_2}) , (s_{n_3}, t_{n_3}) , (s_{n_4}, t_{n_4}) の配置

観測点 (s_n, t_n) を境界に沿って一周すると、必ず2回 t 軸を跨ぐ。図6に示すように、この t 軸を跨ぐ前後にある観測点を $(s, t) = (s_{n_1}, t_{n_1}), (s_{n_2}, t_{n_2}), (s_{n_3}, t_{n_3}), (s_{n_4}, t_{n_4})$ と表記し、この内の2点 $(s_{n_1}, t_{n_1}), (s_{n_2}, t_{n_2})$ を結ぶ線分と t 軸との交点を $(0, t_{12})$ とし、残りの2点 $(s_{n_3}, t_{n_3}), (s_{n_4}, t_{n_4})$ を結ぶ線分と t 軸との交点を $(0, t_{34})$ とする。

交点 $(0, t_{12})$ は2点 $(s_{n_1}, t_{n_1}), (s_{n_2}, t_{n_2})$ 間を $s_{n_1}:-s_{n_2}$ に内分する点であり、また、 $(0, t_{34})$ は2点 $(s_{n_3}, t_{n_3}), (s_{n_4}, t_{n_4})$ 間を $-s_{n_3}:s_{n_4}$ に内分する点である。したがって、

$$\alpha_{12} := \frac{s_{n_1}}{s_{n_1} - s_{n_2}}, \quad \alpha_{34} := \frac{-s_{n_3}}{-s_{n_3} + s_{n_4}}$$

とおくと、 t_{12} と t_{34} は

$$t_{12} = (1 - \alpha_{12})t_{n_1} + \alpha_{12}t_{n_2},$$

$$t_{34} = (1 - \alpha_{34})t_{n_3} + \alpha_{34}t_{n_4}$$

と表される。最初に、交点 $(0, t_{12}), (0, t_{34})$ における関数値を境界値 b_{n_1}, b_{n_2} 、及び、 b_{n_3}, b_{n_4} から線形補間で近似する。交点の座標を求めたときと同様に、線形補間における重みは内分比 $s_{n_1}:-s_{n_2}, -s_{n_3}:s_{n_4}$ から決まるため、 $(0, t_{12}), (0, t_{34})$ における補間値は、それぞれ

$$b_{12} := (1 - \alpha_{12})b_{n_1} + \alpha_{12}b_{n_2},$$

$$b_{34} := (1 - \alpha_{34})b_{n_3} + \alpha_{34}b_{n_4}$$

となる。これらの $(0, t_{12}), (0, t_{34})$ における補間値 b_{12}, b_{34} を、

t 軸に沿ってもう一度線形に補間することにより, $(s, t) = (0, 0)$ にある関数値 $f^{(i, j)}$ を予測する. いま, 原点 $(0, 0)$ は, 交点 $(0, t_{12})$, $(0, t_{34})$ 間を $t_{12} : -t_{34}$ に内分する点なので,

$$\beta := \frac{t_{12}}{t_{12} - t_{34}}$$

とおくと, $(0, 0)$ にある関数値 $f^{(i, j)}$ を次式の $\tilde{f}^{(i, j)}$ によって推定することになる.

$$f^{(i, j)} \simeq \tilde{f}^{(i, j)} := (1 - \beta)b_{12} + \beta b_{34}$$

3.3 数値シミュレーション

本論文では, 前節の線形補間における s 軸の方向 θ として, 前章2.2節で述べた θ^* の近似 $\tilde{\theta}^*$ を用いることを提案する. これは, 線形補間が適用される t 軸方向の方向微分の分散をできるだけ小さくするためである.

本節では, $\tilde{\theta}^*$ を用いて前節の線形補間を適用する効果を数値的に検証した結果について述べる. 前章の数値例と同様に, 2.3節の図3に示した (a)Step, (b)Wave, (c)Texture ($\theta^* = \frac{\pi}{6}$) から $N = 8, 16, 32, 64$ の4通りの解像度で関数値 $f^{(i, j)}$ をサンプリングし, $\theta = \tilde{\theta}^*$ として s 軸の方向を定め, $f^{(i, j)}, i, j = 1, \dots, N - 1$ の推

定を試みた. 図7は, それぞれの例題における推定対象のサンプリング値 $f^{(i, j)}, i, j = 1, \dots, N - 1$, 及び, それらの推定値 $\tilde{f}^{(i, j)}, i, j = 1, \dots, N - 1$ をグレースケール画像で表示したものである.

図7より, Step, Wave, Texture 全てにおいて, 解像度 N を大きくするほど予測結果は原画像により近くなることが分かる. これは, 図4に示す予測値 $\tilde{\theta}^*$ と真値 θ^* との誤差に大きく影響しており, 予測した方向が近いほど見た目も良くなると考えられる. Step に関しては, $\tilde{\theta}^*$ と θ^* との誤差において $N = 8$ で比較的誤差があったが, 図7に示すように原画像と比較してどの解像度 N においても違いはあまり見られないことが分かる. また, Wave に関しては, $N = 8$ に着目すると波のように変化している様子が補間できていないことが見て取れるが, それ以外の N については原画像とほとんど違いがないように見える. 一方, Texture に関しては, どの N においてもテクスチャの模様がつぶれてしまっていることが分かる. 特に, $\tilde{\theta}^*$ と θ^* の比較では $N = 64$ でそこまで方向の誤差が見られないが見た目では大きく変化している. この結果から, Texture のような複雑な模様を多く含む入力画像に関しては, 方向微分の値が一定となる仮定が当てはまらず線形補間による推定が原画像と大きく離

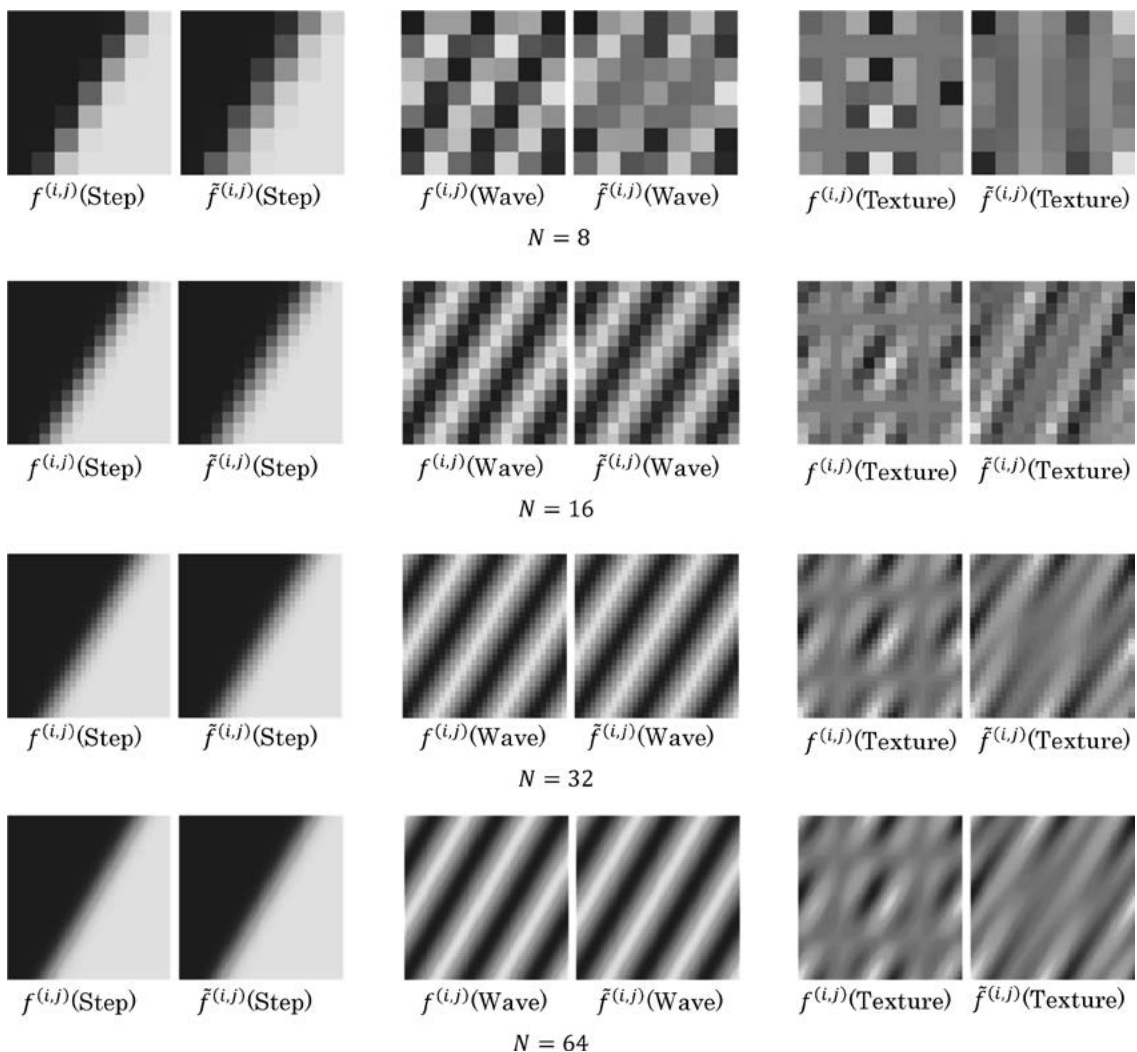


図7: 種々の解像度 N における $\tilde{\theta}^*$ 方向への線形補間

れてしまうことが分かる。

図8は、 $N = 8, 16, 32, 64$ に対し、それぞれの例題におけるサンプリング値 $f^{(i,j)}$ に対する推定値 $\tilde{f}^{(i,j)}$, $i, j = 1, \dots, N-1$ の二乗平均平方根誤差

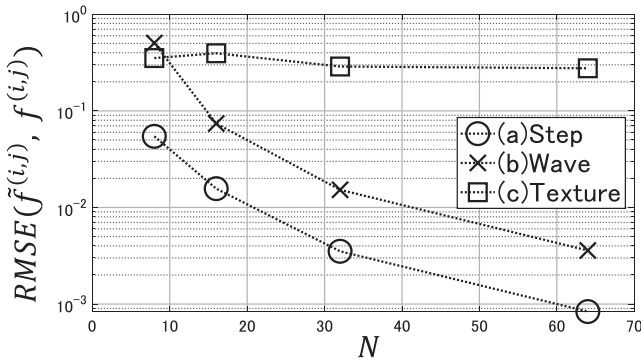


図8：解像度 N を上げていったときの二乗平均平方根誤差の推移

$$RMSE(\tilde{f}^{(i,j)}, f^{(i,j)}) = \sqrt{\frac{1}{(N-1)^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} (\tilde{f}^{(i,j)} - f^{(i,j)})^2}$$

をプロットしたものである。

図8より、Step と Wave においては、解像度 N を上げていくと二乗平均平方根誤差が小さくなっていくことが分かる。一方、Texture においては、解像度 N にかかわらず大きな誤差が

生じていることが見て取れる。この結果は、図7による視覚的な差異と同じ特徴であるが、Wave の $N = 8$ に関しては、Texture よりも誤差が大きくなっており、低解像度では Wave のような縞模様の特徴は見た目以上に推定値の精度が低くなる可能性があると考えられる。

4. 予測関数による画像再構成

本章では、3章で提案した予測関数を用いた残差周波数変換について述べる。また、図9に示す画像処理などで用いられる高精細なデジタル画像をテストデータとし、調和関数を用いた先行研究との性能比較を行った結果についても述べる⁸⁾。

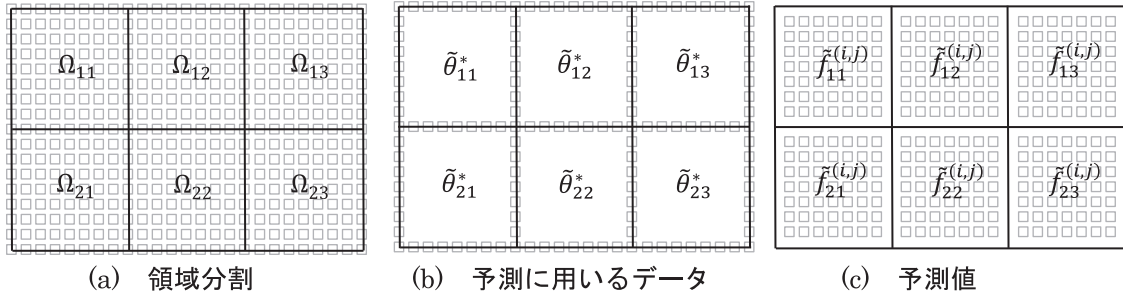
4.1 デジタル画像への適用

図10(a)に示す例のように、水平方向 $L_x \times N + 1$ 画素、垂直方向 $L_y \times N + 1$ 画素のグレースケール画像を $L_x \times L_y$ 個の領域に分割し、各小領域を Ω_{kl} , $k = 1, 2, \dots, L_y$, $l = 1, 2, \dots, L_x$ とする。各小領域 Ω_{kl} に属する画素値をそれぞれ $f_{kl}^{(i,j)}$, $i, j = 0, 1, \dots, N$ とし、これらの画素値から2章で述べた方法で求めた $\hat{\theta}^*$ のことを $\hat{\theta}_{kl}^*$ と表記する。図10の例では、図10(b)の画素を境界値とし、これらの境界値、及び、各 Ω_{kl} における $\hat{\theta}_{kl}^*$ から、3章で述べた方法で、各領域 Ω_{kl} 内部の画素値 $f_{kl}^{(i,j)}$, $i, j = 1, 2, \dots, N-1$ に対する予測値を算出する。領域 Ω_{kl} における予測値を、 $\tilde{f}_{kl}^{(i,j)}$, $i, j = 1, 2, \dots, N-1$ と表記する（図10(c)を参照）。

図9のテスト画像をそれぞれ、 $N = 8$ とし、(a) Woman, (c)



図9：テスト画像（3073×4097画素，4097×3073画素，8ビットグレースケール）

図10: $N=8, L_x=3, L_y=2$ の場合に対するブロック領域 Ω_{kl} の配置

Fishing, (e) Silver については 384×512 の小領域 Ω_{kl} , $k=1, 2, \dots, 512, l=1, 2, \dots, 384$ に分割, (b) Flower, (d) Pier, (f) Thread については 512×384 の小領域 Ω_{kl} , $k=1, 2, \dots, 384, l=1, 2, \dots, 512$ に分割し, 各領域 Ω_{kl} 内部の画素値 $f_{kl}^{(i,j)}$, $i, j=1, 2, \dots, N-1$ を予測値 $\tilde{f}_{kl}^{(i,j)}$ で置き換える. このうち, (a) Woman, (d) Pier において, 各領域 Ω_{kl} 内部の画素値を予測値 $\tilde{f}_{kl}^{(i,j)}$ で置き換えたものから特徴的な 32×32 の小領域を抽出したものを図11に示す.

まず, 図11の (a) Woman に着目すると, 4種類の結果すべてに共通して, 左側の提案手法による予測結果の方が先行研究と比較して輪郭が鮮明になっていることが見て取れる. 特に, 眉毛にかかっている髪の毛や, 首飾りについては, 先行研究である調和関数の場合では輪郭にノイズが存在するが, 提案手法では無くなったことで美観に大きな影響を与えていると考えられる. しかし, グラスの中のワインや肩といったグラデーション部分では調和関数と提案手法に大きな差が見受けられない.

次に, 図11の (d) Pier では, 船体にあるワイヤーや屋根の上の受信器など, 細かいオブジェクトの鮮鋭度がより良く表現できているのが見て取れる. また, 波についても, 提案手法の方がより流体の様子を表現できていると考えられる. しかし, 背景となっている空や建物の壁については, 先行研究と提案手法に大きな違いは現れていないことが見て取れる.

これらのことから, 空や肌といったグラデーションにおいては, 線形補間を適用したことによる効果は調和関数による補間と同程度であると考えられる. 一方, 調和関数では上手く予測できなかった髪の毛などの細かな模様や輪郭などのエッジに関しては, 方向微分の値が一定となる仮定が上手く当てはまり線形補間による予測精度が高くなると考えられる.

4.2 残差周波数変換

本論文で提案する残差周波数変換の大まかな流れを以下に示す.

[残差周波数変換]

Step 0: 入力画像を Ω_{kl} , $k=1, 2, \dots, L_y, l=1, 2, \dots, L_x$ に分割

Step 1: Ω_{kl} における線形補間の方向 $\tilde{\theta}_{kl}^*$ を算出

Step 2: Ω_{kl} の境界値と $\tilde{\theta}_{kl}^*$ から予測値 $\tilde{f}_{kl}^{(i,j)}$,

$i, j=1, 2, \dots, N-1$ を算出

Step 3: 予測残差 $r_{kl}^{(i,j)} := f_{kl}^{(i,j)} - \tilde{f}_{kl}^{(i,j)}$, $i, j=1, 2, \dots, N-1$ を算出

Step 4: 予測残差 $r_{kl}^{(i,j)}$, $i, j=1, 2, \dots, N-1$ に対し, 周波数変換を適用

もとの関数と境界値が一致するように設計された予測関数による予測残差は境界上で0となるため, 端点の値が0の正弦波による周波数変換によって, 予測残差の周波数成分の減衰速度を加速することができる^{2,3)}. 本論文で用いる予測関数は, 境界値の補間によって得られるものであり, やはり正弦波による周波数変換の有効性が期待できる. したがって, ここでは次式の離散サイン変換 (discrete sine transform: DST) によって, 予測残差を周波数成分 (DST 係数) $R_{kl}^{(u,v)}$, $u, v=1, 2, \dots, N-1$ へと変換する⁹⁾.

$$R_{kl}^{(u,v)} = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} r_{kl}^{(i,j)} \sin\left(\frac{\pi}{N} v j\right) \sin\left(\frac{\pi}{N} u i\right),$$

$$u, v = 1, 2, \dots, N-1$$

4.3 DST 係数の減衰速度に関する数値実験

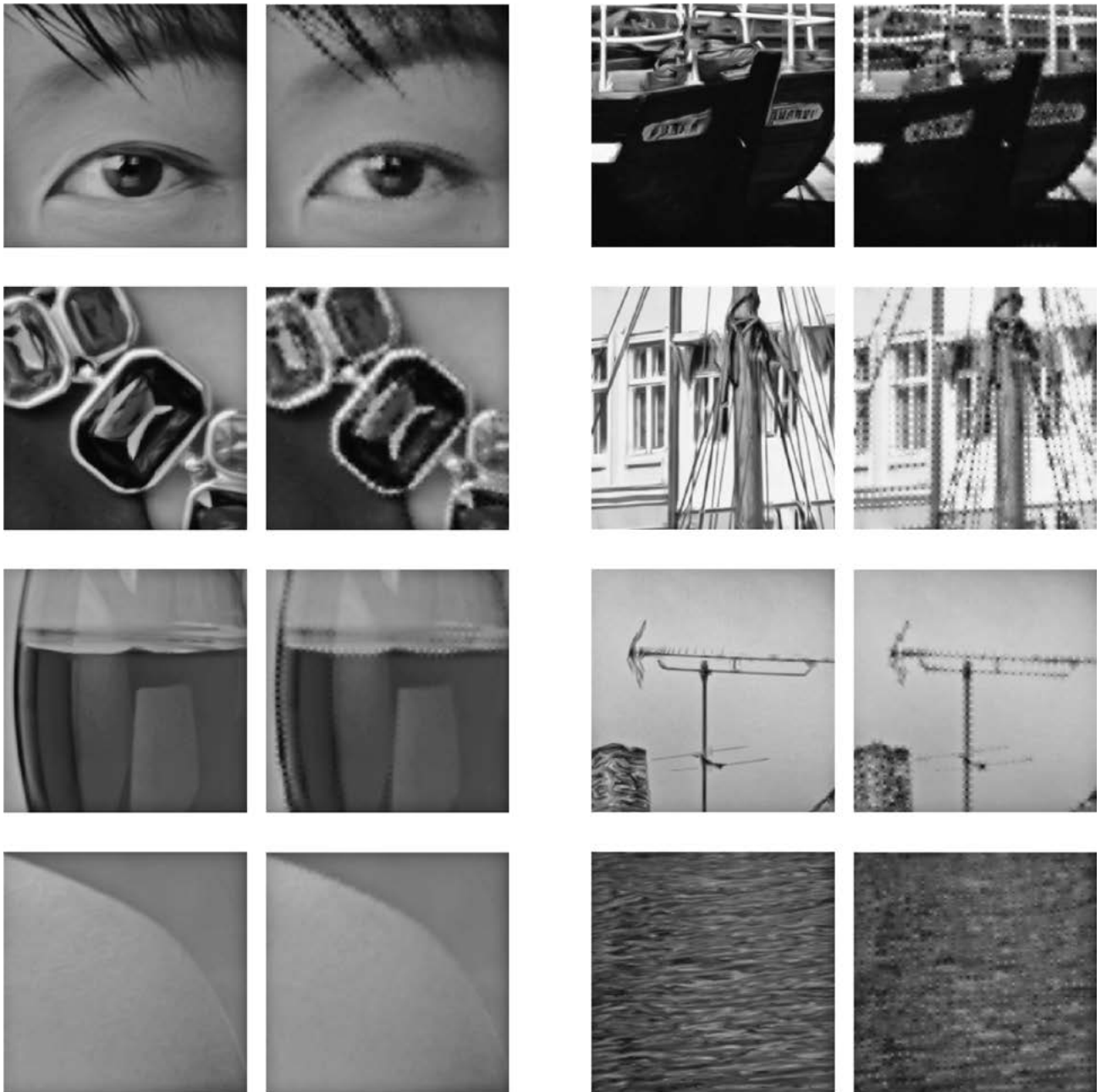
本節では, 本論文で提案する残差周波数変換の性能を図9のテスト画像を用いた数値実験から検証する. まず, 周波数変換に DST を用いる根拠となる予測残差が境界近傍で0に近づくという傾向を確認するため, $N=8$ における残差の大きさを各領域 Ω_{kl} 当たりで平均したもの

$$\bar{r}^{(i,j)} := \frac{1}{L_x L_y} \sum_{k=1}^{L_y} \sum_{l=1}^{L_x} |r_{kl}^{(i,j)}|$$

を図12に示す.

図12における $i, j=0$ もしくは $i, j=8$ は領域の境界部分であるため, $i, j=1, 2, \dots, 7$ までの値を示している. 図12の6種類全てのデータにおいて, i 方向 j 方向ともに予測残差の値が境界近傍で0に近づいていることが見て取れる. これらの結果から, 提案する予測残差は比較的, 境界近傍で0に近づく傾向があると考えられる.

次に, 残差 DST 係数の減衰速度について, 本論文で提案する方法と調和関数を用いた先行研究³⁾ を数値的に比較した結果について述べる. 本数値実験では, DST 係数の減衰速度を



提案手法

調和関数

(a) Woman

提案手法

調和関数

(d) Pier

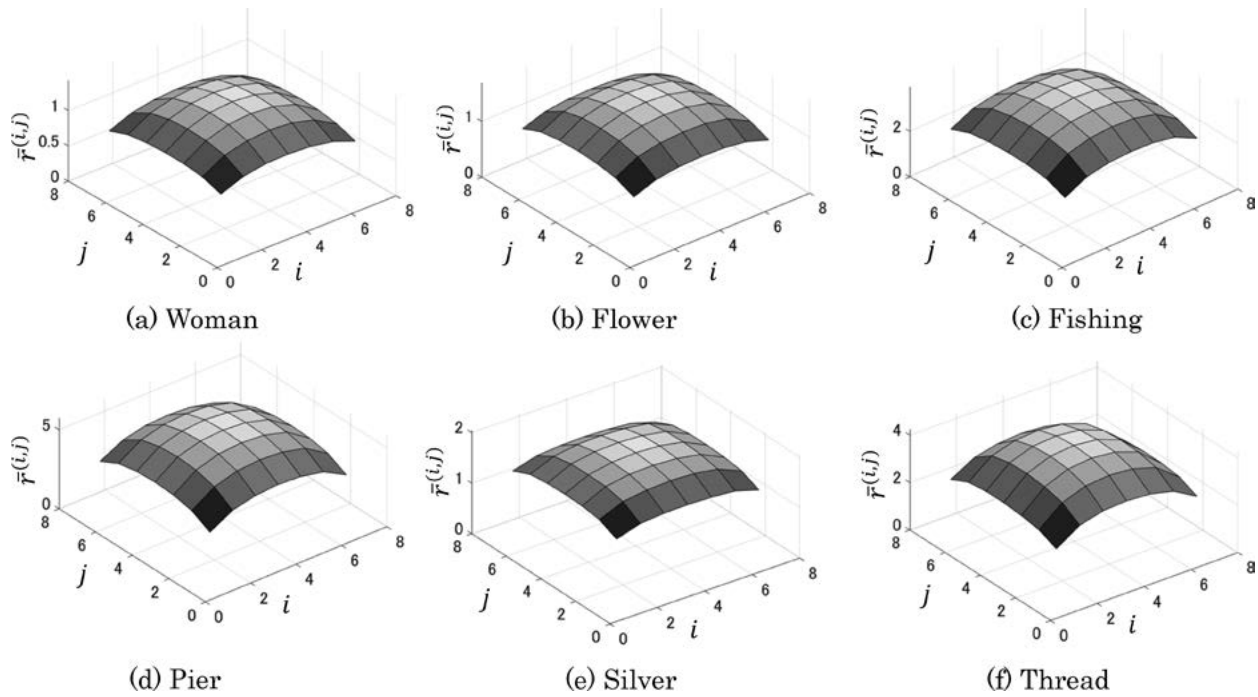
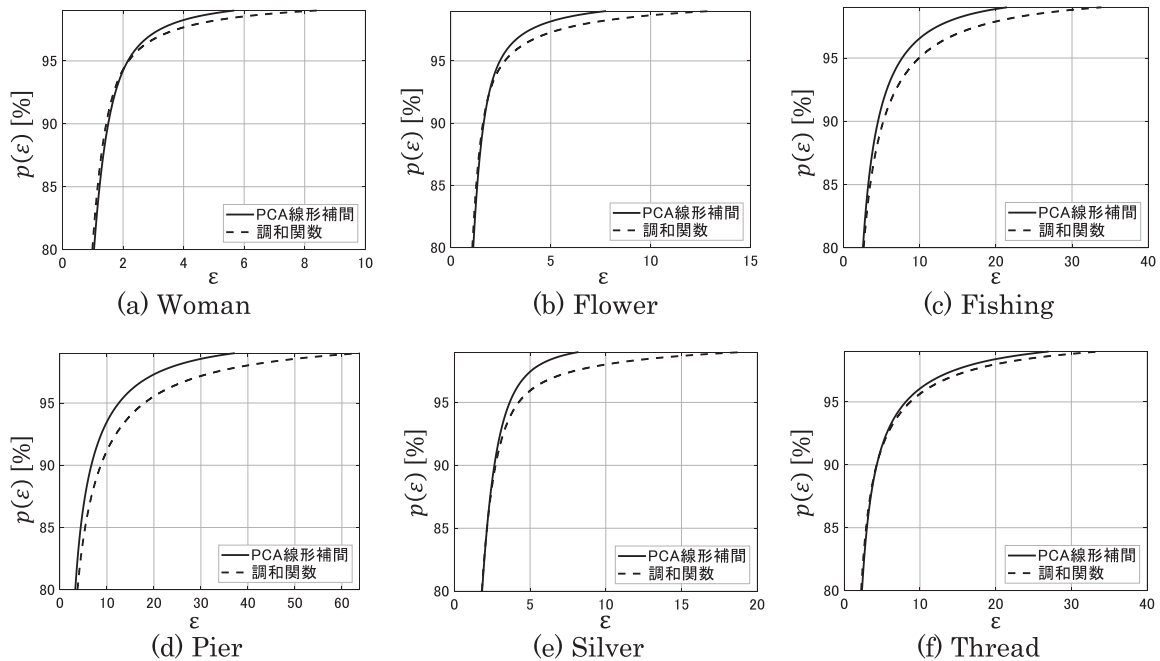
図11: $\hat{\theta}_{kl}^*$ 方向の線形補間を適用した結果と調和関数による補間との比較

$$p(\varepsilon) = \frac{\tilde{R}_{kl}^{(u,v)}}{L_x L_y (N-1)^2} \times 100 [\%]$$

によって評価する。ただし、 $\tilde{R}_{kl}^{(u,v)}$ は $|R_{kl}^{(u,v)}| \leq \varepsilon$ を満たす DST 係数の個数、 $L_x L_y (N-1)^2$ は全 DST 係数の個数を表す。このとき、DST 係数の大きさが低周波帯域から高周波帯域に向かって単調に減少するものと仮定すると、同じ ε に対して、係数の大きさが ε 以下になる割合 $p(\varepsilon)$ が大きいほど係数の減衰速度は速いと言える。図13は、横軸に ε 、縦軸に $p(\varepsilon)$ をとり、 $N = 8$ とし、本論文で提案する残差 DST 係数の減衰速度を先行研究と

比較した結果である。

図13のすべてのテスト画像において、本論文で提案する残差 DST 係数の方がどの ε においても、先行研究より $p(\varepsilon)$ が大きくなっていることが分かる。これは、先行研究より ε 以下になる係数が多いことを示しており、全体的に先行研究よりも速く係数の大きさが小さくなると考えられる。この減衰速度が加速された結果については、提案手法の予測が先行研究よりも精度が良かったため、残差をとった段階でほとんどの数値を小さく抑えられており、残差 DST 係数の大きさも小さくなったと考えられる。

図12：境界近傍で予測残差が0に近づく傾向の確認 ($N=8$)図13：残差 DST 係数の減衰速度に関する先行研究との比較 ($N=8$)

5. おわりに

本論文では、ある特定の方向を向いたときの方向微分が一定となるような予測関数を用いた残差周波数変換を提案し、周波数係数の減衰速度の加速を試みた。予測関数を構成する際には、主成分分析を用いて入力データの方向微分の分散が最小となる方向を同定し、この方向に勾配一定の仮定を適用するものとした。

実際に、主成分分析を用いて入力データの方向微分の分散が最小となる方向を同定するには入力データから勾配に関する情報を抽出する必要があるが、本論文では入力データの中心差分から得られた勾配の近似値を用いるものとした。また、種々の特徴を持った関数を入力データとした数値実験により、近似精度を検証した結果についても述べた。残差周波数変換における予測関数については、境界上の異なる2点を直線で結び、その直線上の入力データを境界上の2点における境界値から線形に補間することを考えた。このとき、補間直線に沿った入力デー

タの方向微分はできるだけ一定になることが望ましいので、主成分分析から求めた方向に線形補間を適用することを提案した。

残差周波数変換における本提案の有効性について、既に提案されている調和関数を予測関数とする方法との比較数値実験を行った結果についても述べた。比較用のテストデータとしては、画像処理の研究で用いられる高精細なデジタル画像を用いた。比較数値実験においては、まず、予測関数の精度を主観的に確認した結果、調和関数による予測に比べ、エッジの鮮鋭度や細かな模様を上手く表現できることを確認した。さらに、予測残差に周波数変換を適用した結果、より小さな値に変換係数が集中することを示し、減衰速度の加速が見込めることについても確認した。

本論文では、残差周波数変換における変換係数、及び、境界情報の量子化については検討できていない。そのため、今後、画像圧縮などの応用を考えた場合には情報量をできるだけ削減する符号化処理のスキームが必要となる。

謝辞

本研究は、名城大学学生実験実習費、日本学生支援機構奨学金の支援を受けて行われました。ここに、感謝の意を表します。また、本論文の作成にあたって、ご意見や改善案をくださった匿名査読者の方々に深く感謝申し上げます。

参考文献：

- 1) M. Taibleson, *Fourier coefficients of functions of bounded variation*, Proc. Amer. Math.Soc., 18(4), p.766, 1967.
- 2) C. Lanczos, *Applied Analysis*, Prentice-Hall, 1956 and Dover, 1988 (p.236).
- 3) N. Saito & J. F. Remy, *The polyharmonic local sine transform: A new tool for local image analysis and synthesis without edge effect*, Appl. Comput. Harmon. Anal., 20(1), pp.41-73, 2006.
- 4) I. T. Jolliffe, *Principal Component Analysis* (2nd ed.), New York: Springer, 2002.
- 5) E. W. Weisstein, *Expectation Value*, MathWorld – A Wolfram Web Resource, Retrieved from <https://mathworld.wolfram.com/ExpectationValue.html> (2023-06-11).
- 6) A. Ralston, & P. Robinowitz, *A First Course in Numerical Analysis*, New York: McGraw-Hill, 1965 and New York: Dover, 2001 (p.58).
- 7) F. B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.), New York: McGraw-Hill, 1956 and New York: Dover, 1987 (sec. 2.2).
- 8) 画像電子学会, JIS X 9204: 2004高精細カラーデジタル標準画像 (XYZ/SCID), <https://www.iieej.org/trans/scid-new.html> (2023-06-11)
- 9) K. Sayood, *Introduction to Data Compression*, San Francisco: Morgan Kaufmann, 2000 (sec. 12.4.3).