

平成 26 年度 学 位 論 文

論 文 題 目

<邦文>

支配型 AHP と超一対比較行列の数学的特性に関する研究

<欧文>

A Study on Mathematical Properties of Dominant AHP
and Super Pairwise Comparison Matrix

学位論文申請者

水野 隆文

目次

第 1 章	本論文の構成	9
1.1	構成	9
1.2	本論文において新規の知見が提案される箇所	10
第 2 章	意思決定法の分析にあたって	11
2.1	本研究の背景	11
2.2	本研究の目標	12
2.3	意思決定手法	13
2.4	AHP (Analytic Hierarchy Process)	14
2.5	本論文の視点	15
2.6	表記法	15
第 3 章	AHP/ANP の解釈	17
3.1	AHP の構成要素	17
3.2	AHP の具体的なプロセス	18
3.3	ANP	25
3.4	代替案の追加による順位逆転	26
3.5	まとめ	28
第 4 章	支配型 AHP, 多重支配型 AHP の解析と解釈	29
4.1	支配型 AHP が開発された背景	29

4.2	支配型 AHP の構成要素と評価原理	31
4.3	支配型 AHP の総合評価値の算出	33
4.4	多重支配型 AHP	39
4.5	互換性の分析	40
4.6	互換性と推定定理	45
4.7	AHP/ANP との同値性	46
4.8	考察	48
第 5 章	CCM(一斉法) の解析と解釈	51
5.1	最適化問題としての重みベクトルの探索	54
5.2	正規化について	56
5.3	考察	59
第 6 章	超一対比較法の解析と解釈	61
6.1	絶対的重要度	62
6.2	超一対比較行列	63
6.3	絶対的重要度を用いた支配型 AHP の解釈	65
6.4	考察	71
第 7 章	結論	75
7.1	今後の課題	76
参考文献		79

目次

1.1	本論文の構成の概念図.	10
3.1	AHP の基本的な 3 層構造	18
3.2	数値例: 交通システム導入のための AHP の階層構造.	22
4.1	数値例: 交通システム導入のための支配型 AHP の階層構造.	34
5.1	CCM において, 解が収束する様子.	53
5.2	正規化により距離の大小が逆転する例 ($n = 2$).	57

アルゴリズム目次

1	一対比較法 (固有値法)	20
2	CCM(Concurrent Convergence Method, 一斉法)	51

第 1 章

本論文の構成

1.1 構成

本論文は以下の章立てによって構成される。

まず第 2 章において、著者が意思決定法を分析するにあたっての視点を明確にする。後の章で必要となる表記法の導入も行う。

本論文は、支配型 AHP という意思決定法についての分析を主に扱う。この支配型 AHP は、AHP という意思決定法を改良したものである。そこで第 3 章では、まず、意思決定法 AHP について説明する。この章で示す AHP の表現を元に、後の論述を展開していく。

そして、第 4 章で支配型 AHP の導入を行い、数理的な分析を開始する。この章の後半より、本研究で得られた新規の知見が記述される。

つづく第 5 章では、CCM についての、数学的な分析を行う。CCM は支配型 AHP において、ある要請を解決するために用いられるアルゴリズムである。本論文では、この CCM について、最適化問題という観点から知見が加えられる。

また、第 6 章では超一対比較行列についての分析を行う。超一対比較行列は、CCM とは別の観点から開発された支配型 AHP のためのツールである。本論文において、超一対比較行列の数理的な表現を提示し、支配型 AHP との同値性を示す。

最後、第 7 章で、本研究の結論と今後の課題を述べる。

図 1.1 に本論文の構成の概念図を示す。基本的には、章番号に沿って議論が進行するが、

支配型 AHP についての議論 (第 4 章) より後の章については, 独立に読み進めることが可能である.

1.2 本論文において新規の知見が提案される箇所

本研究で提示される新規の知見が提案される部分は, 第 4 章の第 4.5 節からである. それに続く第 5 章の, 最適化問題という視点からの CCM の分析, 第 6 章の超一対比較行列の解釈が, 本研究で提示される新たな知見である.

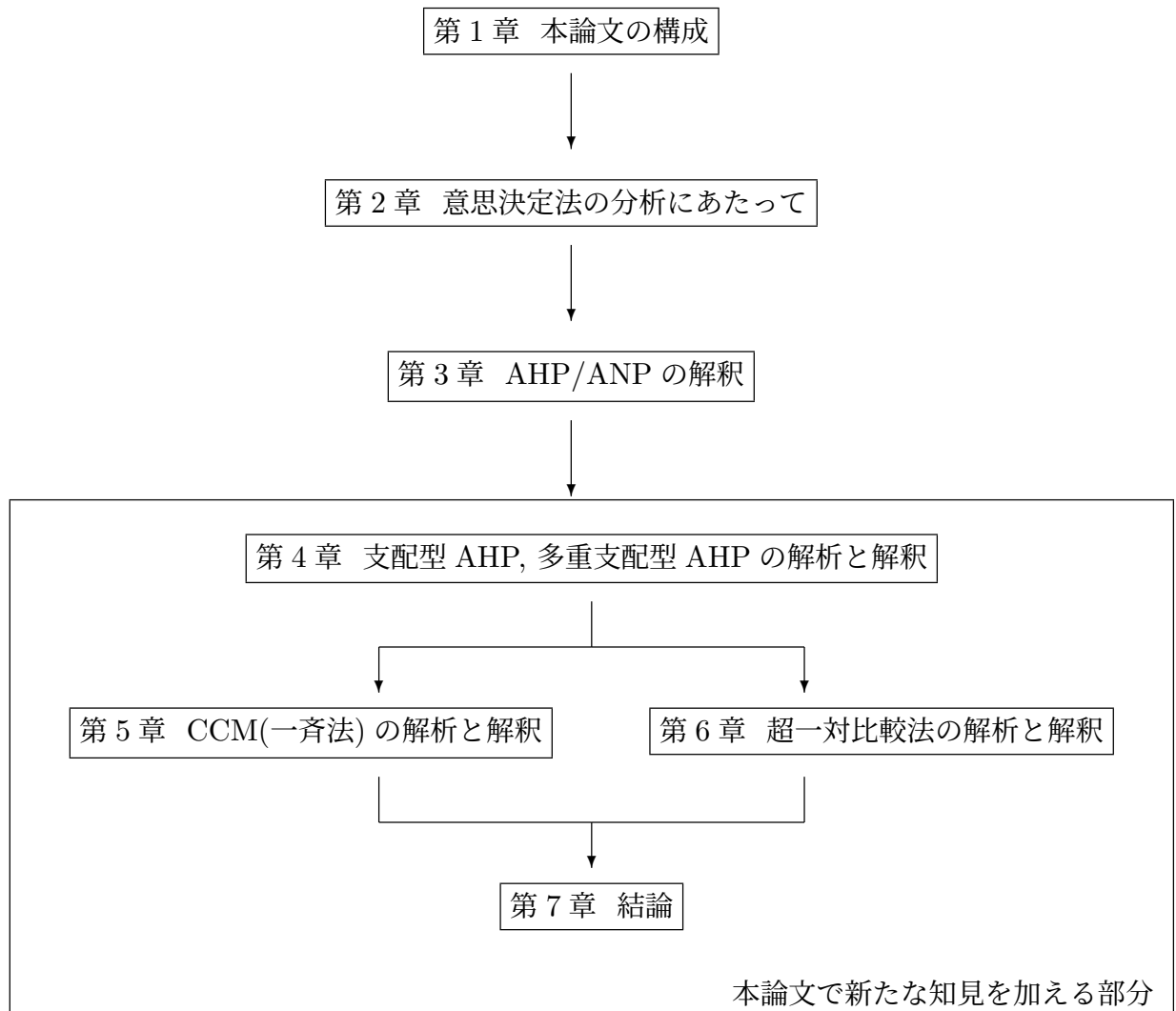


図 1.1 本論文の構成の概念図.

第 2 章

意思決定法の分析にあたって

本論文は、AHP/ANP、支配型 AHP、超一対比較行列といった意思決定法、あるいは意思決定のためのツールについての研究の成果をまとめたものである。そこで本章では、研究の背景、研究の目標を記述する。そして、これら意思決定法を扱う上での、著者のスタンス/スタンドポイントを明らかにする。

2.1 本研究の背景

意思決定は、社会あるいは企業、家庭、個人にとって、常に重要な位置を占める問題である。意思決定に必要な情報すべてについて、それらが、ひとつの次元に還元される物理的量として提供される場合は、意思決定に大きな混乱はないと考えられる。しかし、次元の異なる物理量同士を比較する場合や、そもそも定量的な計量が不可能な概念同士を比較しなければならない場合の意思決定については、科学的な妥当性が明示された決定的な手法が確立していないのが現状である。

そのような場面では、我々は、合意と納得が得られる範囲で事前に手続きを決め、その手続きに基づいて意思決定を行うことになる。その際、可能な限り意思決定の根拠を定量的に明示する手法を採用することが望ましい。AHP (Analytic Hierarchy Process) はこの要請に応えることができる意思決定手法として提案された。

提案されてから 20 年の間、実践的な場面で利用されてきた AHP であったが、同時に、

意思決定者の納得と合意を損ないかねないケースがあることも指摘されてきた。

それら問題点を改善する形として提案されたのが支配型 AHP である。支配型 AHP は、当初より数学的構造を明示する形で提案されてきたが、この支配型 AHP で利用される CCM というアルゴリズムと超一対比較行列というツールについては、実践的な側面が先行し、数学的な分析を行う余地を多く残していた。

そこで、本研究により、支配型 AHP をあらためて解析した上で、CCM や超一対比較行列についての分析を行うはこびとなった。

2.2 本研究の目標

本研究の目標は、支配型 AHP と超一対比較行列の数学的特性を分析することである。AHP あるいは支配型 AHP の、意思決定手続きにおける個々の評価や順序付けという問題を、線形空間のベクトルへの作用・操作に抽象化し、その抽象化された演算を分析する。または、各手法を、与えられた制約下で、ある解 (ベクトル) を求めるための手続きの順序列と解釈し、その解の存在や求解の可能性を考察する。具体的には、以下のことを明らかにすることを目指す。

- 支配型 AHP において、複数の視点から意思決定を行う場合 (支配代替案が複数ある場合) の評価値を統合する際に必要な条件を示す。あるいは評価値を統合することができるのかどうかを、数学的構造を明示した上で示す。
- AHP と支配型 AHP の数学的構造における同値性を分析する。
- CCM を最適化問題解決のためのアルゴリズムとみなしたときの計算手法および解の分析を行う。
- 超一対比較行列と支配型 AHP の同値性を分析する。

2.3 意思決定手法

一般に、意思決定は、決定を必要とする問題の発見と認識 (問題認識)、とりうる代替案の発見と考察 (設計活動)、代替案の選択 (選択活動) という 3 つの活動を順序だてて実行することにより実現される [2] . 本論文は、これらのうち代替案の選択に焦点をあて、意思決定問題を、**ある目的を達成するために複数の代替案から最適なものを選択する問題**に限定する。代替案を選択する際には、制約が課され、さまざまなコンフリクト (conflict) が生じるが、このコンフリクトを解消することも意思決定手法の役割である。

意思決定手法を設計する際には、二種類のアプローチが考えられる。

ひとつは、記述的なアプローチである。これは、普段、人間がどのように意思決定を行っているか観察しモデル化した上で、それをできるだけ正確に再現し、その意思決定に妥当性を与えるアプローチである。意思決定に際し、必要な情報の物理的な計量を行うことができる場合は、対応する物理モデルに基づき、科学的に正しい決定を演繹することを目指す。

もう一方のアプローチは、意思決定を行う手続きを事前に定めておき、その手続きで意思決定を実行することについて合意を得た上で、その手続きに沿って意思決定を行う規範的なアプローチである。後者のアプローチを採用する場合は、意思決定手法そのものを数学的に分析し、その手法が人間の納得の範囲を超える結果を提示することにならないか、一意の結果が得られる手続きか、決まった条件では事前に想定した結果を出力するか等を示す必要がある。これらが意思決定者の納得の範囲を超えるものであれば、その意思決定手法は誤りが存在すると判断し、その意思決定手法を改善する。

本研究は、後者の規範的なアプローチで意思決定法が設計されているとして、分析を進める。

2.4 AHP(Analytic Hierarchy Process)

AHP(Analytic Hierarchy Process) は 1977 年に Saaty により提唱され [18], 1980 年までにまとめられた意思決定手法である [14]. まず, アメリカにおいて利用がはじまり, 現在では, 日本を含む, アジア, ヨーロッパでも研究が行われている.

意思決定を扱う他の OR 手法と比較して, 以下のことがらが AHP の定性的な特徴として挙げられる.

- 簡単かつ簡潔に構成できる.
- グループで意思決定を行う場合と, 個人で意思決定を行う場合の両方に応用できる.
- 人間が持っている主観や勘を反映できる.
- 多くの評価基準を同時に考慮できる.
- あいまいな状況を明確に説明できる.
- 意思決定者に特別な訓練を要求せず, 意思決定者が容易に扱うことができる.
- 複雑な計算を用いない.

これらの性質が評価され, 経済問題や経営問題, プラント設計の分析, エネルギー問題, 医療と健康, 紛争処理, 軍縮問題, 国際問題, 人事評価, 行政のプロジェクト選定, ポートフォリオ選択, 政策決定, 都市計画, 日常生活における意思決定等, 多彩な分野で AHP は応用されている.

AHP は, 大きく分けると, 次の 3 つの手続きを順に実行していく意思決定手法である.

1. 問題の階層化
2. 要素の評価
3. 評価値の合成

これらの手続きそれぞれについて際立った特徴がある. 基本的な階層を総合目的/評価基準/代替案の 3 つの階層から構成する点と, 要素の評価において一対比較法を用いる点, 評

価値の合成を行列とベクトルの乗算で表現する点である.

2.5 本論文の視点

本論文では, AHP あるいは AHP を改良した意思決定手法を, ベクトルと行列の演算, またはベクトルを出力する手続きの集合としてとらえる. この視点から数学的解釈を行い, 分析を行う. そのため, 線形代数における解析的な分析が中心となる. すなわち, 意思決定手法のベクトルを用いた宣言的な表現や解釈, 各手続きをベクトルの射ととらえたときの定義域と値域の確認, 各手続きを, ある解を出力するアルゴリズムと解釈したときの解を出力するための条件の考察, また解が構成する空間の分析 等である.

2.6 表記法

ここで, 本論文で用いる記号や表記法を導入する. 行列は A のようにローマン体の大文字で表記し, ベクトルは $\mathbf{B}$, $\mathbf{x}$ のように太字で表記する. 記号 $^\top$ は行列またはベクトルの転置を表現する. この記号を用いて, ベクトル $\mathbf{x}$ とベクトル $\mathbf{y}$ の内積は $\mathbf{x}^\top \mathbf{y}$ と表現される. 内積はスカラー値である.

記号 $\mathbb{R}$ は実数の集合を, 記号 $\mathbb{R}_+$ は 0 より大きい実数の集合を表現する; $\mathbb{R}_+ = \{r | r > 0, r \in \mathbb{R}\}$. 要素すべてが 1 からなる特別な n 次元ベクトルを $\mathbf{1}_n$ と表記する; $\mathbf{1}_n^\top = \underbrace{[1, \dots, 1]}_{n \text{ 個}}^\top$. 特に混乱が生じない場合は添字の n を省略し $\mathbf{1}$ と表記する. このベクトルを用いると, あるベクトル $\mathbf{x}$ の要素の和は $\mathbf{1}^\top \mathbf{x}$ と表現される.

本論文では, あるベクトルの要素の和が 1 になるように, そのベクトルを適切なスカラー値で除算することを, ベクトルを**正規化する**と表現する. $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n$ のとき, このベクトル $\mathbf{x}$ を正規化したベクトルは, $\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{x}}$ と表現される. 正規化された正の n 次元ベクトルからなる集合を $\mathbb{Q}_n$ と表記する; $\mathbb{Q}_n = \{\mathbf{x} | \mathbf{1}_n^\top \mathbf{x} = 1, \mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^n\}$.

$m \times n$ 行列 A の i 行 j 列目の要素が a_{ij} のとき, 行列 A は次のように要素を配列する.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

行列は, 列ベクトルを横に並べ構成することも可能である. このことを強調する場合には, 次のように列ベクトルを横に並べて表現する.

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

また, 行列 A の (線形代数における) 階数を $\text{rank}(A)$ と表現する. 行列 A の階数 $\text{rank}(A)$ は, 連立方程式 $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ の解 $\mathbf{x}$ の基底変数の数である. 解 $\mathbf{x}$ は, 基底変数以外の変数を自由変数として構成することができる. 直観的には, $\text{rank}(A)$ がどれだけ小さいかが, 解 $\mathbf{x}$ が可能となる空間の次元がどれだけ大きいかを表現する. また, $\text{rank}(A)$ は, 行列 A の各列ベクトルが張る線形空間の大きさ (次元) を表現する.

第 3 章

AHP/ANP の解釈

AHP は、ある総合目的を達成するために、複数の代替案の候補の中から一つの代替案を選択するためのプロセスである。代替案の選択に際して、各代替案のスコアが提示される。本章では、AHP の手続きを、後の章で他のプロセスと比較することが可能となるように記述する。

3.1 AHP の構成要素

AHP における意思決定では、まず、次の構成要素が用意される。

- 意思決定者
- 総合目的
- 評価基準の集合
- 代替案の集合

意思決定者は一人の場合が一般的だが、企業等での意思決定では複数の場合もある。本章では、意思決定者は一人であると仮定する。

総合目的は、意思決定により問題が解決された状態、あるいは意思決定により解決すべき目標を文章で記述し表現する。AHP を実行するにあたり、総合目的と代替案の集合はあらかじめ与えられることが多い。

評価基準は3個から7個ほどが慎重に選択される。評価基準は、一般に、それぞれが質の異なる概念であり、物理的な計量による比較ができない。また、それぞれが相反しており、これら評価基準からみた各代替案の評価によって意思決定のコンフリクトが表現される。

本論文では、特に断らない限り、代替案の集合を $Alt=\{alt_1, alt_2, \dots, alt_m\}$, 評価基準の集合を $C=\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ と表現する。代替案の数は m 個、評価基準の数は n 個とする。

3.2 AHP の具体的なプロセス

AHP は、大きく分けて、以下の手続きから構成される。

1. 問題の階層化
2. 要素の評価
3. 評価値の合成

各手続きを簡潔に記載する。

3.2.1 問題の階層化

AHP では、まず、総合目的、評価基準の集合、代替案の集合を3つの層に配列する。図3.1にAHPの基本的な3層構造を示す。最上層に総合目的を、第2層に評価基準を、最下層に代替案を配置する。図上では、煩雑さを回避するために各層をひとまとまりにし、隣接

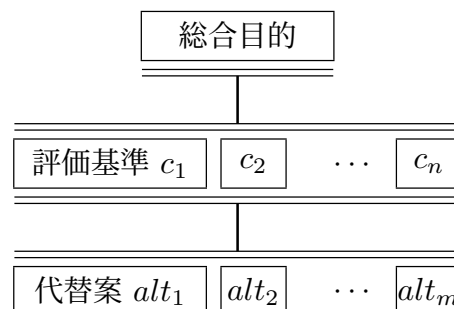


図 3.1 AHP の基本的な3層構造

する層を 1 本の線で連結している。しかし、実際には ある層のある要素は隣接する層の要素すべてと連結している。すなわち、図 3.1 の第 2 層の評価基準 c_j は、最下層の代替案すべてと連結しており、また、最下層の代替案 alt_i は第 2 層の評価基準すべてと連結している。特に断らない限り、最上層から最下層にいたる順序がある。この順序で、評価の順序を表現する。

AHP では、この 3 層構造が基本となる。問題の規模によっては、最上層の総合目的と最下層の代替案の間に、さらに複数の層を挿入することがあるが、本論文では、この 3 層構造で議論を進める。

3.2.2 要素の評価

AHP の階層構造において、ある層のある要素からみた、隣接する下の層のある要素の重要度を数値で提示することを **評価する** と表現し、その数値を **評価値** と呼ぶ。AHP では、この評価を、意思決定者が一対比較法で実施する。一対比較法により、要素ごとに、隣接する下の層のすべての要素の評価値が得られる。すなわち、総合目的からみた評価値が n 個の評価基準それぞれに与えられ、各評価基準からみた評価値が m 個の代替案それぞれに与えられる。 m 個の代替案に n 組の評価値が与えられることに注意する。

一対比較法は、意思決定者の主観を変換し数値として出力する手法である。AHP の各要素の評価値は、物理的な計量（距離、時間、金額等）で代替できないことを前提としているため、各要素の評価値は主観から変換される数値で表現される。

ここで一対比較法の手順を アルゴリズム 1 に示す。これは、ある要素 u からみた重要度を、集合 $\{l_1, \dots, l_k\}$ の要素それぞれに数値として与える評価方法である。意思決定者が提示する重要度を表現する句は、{“同じくらい重要”, “やや重要”, “かなり重要”, “非常に重要”, “きわめて重要”} のような自然言語の句からなる集合の中から選択される。この句に対応する主観値は、 $\{1/9, 1/7, 1/5, 1/3, 1, 3, 5, 7, 9\}$ のような集合の中の、その句が表現する重要度に応じた数値である。ある数値 θ を決め、 $\{\dots, \theta^{-2}, \theta, \theta^2, \dots\}$ の中のいずれか

を対応させる場合もある.*¹ 視点を定めた後, 同じ階層の要素同士のすべての組み合わせについて一対比較を行い, それを行列に配列する. この行列を **一対比較行列** と呼ぶ. 一対比較行列は対角線の要素が 1 で, それ以外の要素は逆数対称となる行列である. つまり, 一対比較行列 W の i 行 j 列目の要素 w_{ij} は, j 行 i 列目の要素の逆数である; $w_{ji} = 1/w_{ij}$. 特に, 一対比較行列 W の要素 w_{ij} が次の条件を満たすとき, その一対比較行列 W は**整合している**という.

$$\forall i, j, k, \quad w_{ij}w_{jk} = w_{ik}. \quad (3.1)$$

これは, 意思決定者の評価が完全に合理的である状態 (推移律をみたしている状態) を表現している.

この一対比較行列の主固有ベクトルを正規化したベクトルの要素が評価値となる. つまり, この固有ベクトルの i 番目の要素が i 番目の対象 l_i の評価値である.*²

AHP では, まず, 総合目的からみた各評価基準の評価値を一対比較法により算出する. 次に, n 個の評価基準それぞれについて, その評価基準からみた各代替案の評価値を一対

アルゴリズム 1 一対比較法 (固有値法)

Input: 視点 u , 評価対象の集合 $l_1, l_2, \dots, l_k$.

Output: 評価値の集合を要素としてもつベクトル $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_k]^\top$.

- 1: **for all** $(i, j) \in \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k\}$ **do**
 - 2: $f_{ij} :=$ 意思決定者が視点 u からみた, 要素 l_i の l_j に対する重要度を表現する句.
 - 3: $w_{ij} :=$ 句 f_{ij} に対応する主観値
 - 4: w_{ij} を行列 W の i 行 j 列目に配列する
 - 5: **end for**
 - 6: $\mathbf{V} :=$ 行列 W の主固有ベクトル
 - 7: $\mathbf{v} := \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{V}}$
-

*¹ Saaty は前者の $\{1/9, 1/7, 1/5, 1/3, 1, 3, 5, 7, 9\}$ を用いる方法を提案した.

*² 一対比較行列が正行列 (すべての要素が非零非負の実数である行列) であることと, ペロン (Perron) の定理より, この主固有ベクトルのすべての要素は正である [26].

比較法により算出する．総合目的からみた評価基準の評価値を特に**重み**と呼び，評価基準すべての重みをベクトルの形に配列したものを**重みベクトル**と呼ぶ．本稿では，特に断りのない限り， j 番目の評価基準 c_j の重みを b_j と表記する．また，重みベクトルを $\mathbf{b}$ と表記する； $\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]^\top$ ．

各代替案は評価基準の数だけ評価値をもつ． j 番目の評価基準 c_j からみた i 番目の代替案の評価基準を a_{ij} と表記する． i 番目の代替案の評価値 a_{ij} を i 番目の要素としてもつベクトル $\mathbf{a}_j$ は，評価基準 c_j を視点とした一対比較法の出力として得られるベクトルである．ベクトル $\mathbf{a}_j$ を第 j 列に配列する行列を**評価行列**と呼び， A と表記する．

$$A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

評価行列 A は $m \times n$ 行列であり，この行列の i 行 j 列目の要素が評価基準 c_j からみた代替案 alt_i の評価値を表現する．

3.2.3 評価値の合成

AHP の最後の手続きとして，評価値の合成を行う．この評価値の合成は，評価行列と重みベクトルの乗算として表現され，計算される．そして評価値を合成した結果を，ベクトル $\mathbf{E}$ と表記する．

$$\mathbf{E} = A\mathbf{b}. \quad (3.3)$$

このベクトルの i 番目の要素 E_i が i 番目の代替案 alt_i のスコアを表現する．このスコアがもっとも大きい代替案が総合目的を達成するために選択される代替案である．

このように評価値を合成して得られた代替案のスコア E_i を特に**総合評価値**と呼び，この総合評価値を要素としてもつベクトル $\mathbf{E}$ を**総合評価値ベクトル**と呼ぶ．

他の意思決定者が提示する結果と比較する場合等は，この総合評価値ベクトルを正規化し，正規化されたベクトル同士を比較する．特に正規化したことを強調する場合は，小文字で $\mathbf{e}$ と表記する； $\mathbf{e} = \frac{\mathbf{E}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{E}}$ ．

3.2.4 数値例

ここで確認のために数値を提示して AHP による意思決定の例を示す。

ある自治体に交通システムを導入するというシチュエーションを想定する。この自治体では、導入可能な交通システムの候補として、トロリーバス、モノレール、鉄道の3つが挙げられている。利便性の観点からはトロリーバスが最良で、環境性の観点からはモノレールが最良で、費用の観点からは鉄道が最良であると仮定する。つまり、意思決定においてコンフリクトが生じている。この状況を AHP によって解決するシナリオの例を提示する。

■問題の階層化 この意思決定問題の総合目的は、この自治体にとってもっともよい交通システムを導入することである。代替案の集合は $Alt=\{alt_1, alt_2, alt_3\}=\{\text{トロリーバス, モノレール, 鉄道}\}$, 評価基準の集合は $C=\{c_1, c_2, c_3\}=\{\text{利便性, 環境性, 費用}\}$ とする。

AHP ではまず、これら構成要素を図 3.2 のように階層構造の中に配置する。

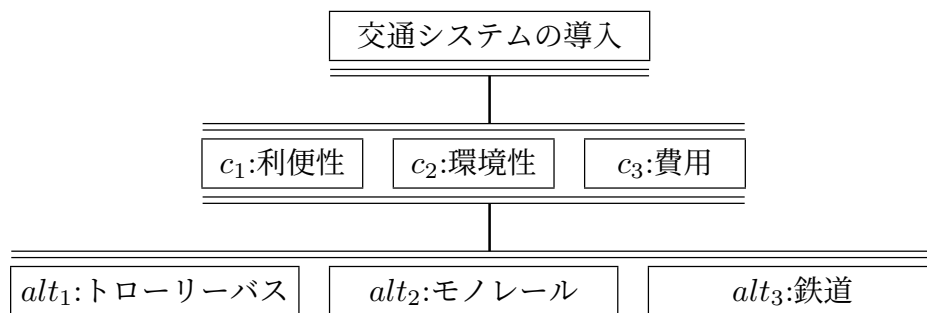


図 3.2 数値例: 交通システム導入のための AHP の階層構造.

■要素の評価 次に、総合目的を達成することを念頭におき、評価基準の重みを決定する。

総合目的からみて、評価基準同士を一对比較し、一对比較行列 W を構成する。

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} c_1:利便性 & c_2:環境性 & c_3:費用 \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.4)$$

一对比較行列 W の 3 行 1 列目の要素 $1/5$ は、総合目的からみた場合、評価基準 c_3 (費用) の重要度の主観値が、評価基準 c_1 (利便性) の $\frac{1}{5}$ であることを示している。つまり、この総合目的を達成する場面では、利便性は費用の 5 倍重要ということになる。

次に各評価基準からみた代替案の評価を行う。まず、評価基準 c_1 (利便性) に注目して代替案同士を一对比較し、一对比較行列 W_{c_1} を構成する。

$$W_{c_1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} alt_1:トロリーバス & alt_2:モノレール & alt_3:鉄道 \end{matrix} \\ \begin{matrix} alt_1 \\ alt_2 \\ alt_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 1/5 & 1 & 2 \\ 1/9 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.5)$$

一对比較行列 W_{c_1} の 3 行 1 列目の要素 $1/9$ は、評価基準 c_1 (利便性) に注目した場合、代替案 alt_3 (鉄道) の利便性の重要度の主観値が、代替案 alt_1 (トロリーバス) の $\frac{1}{9}$ であること、つまり、トロリーバスは鉄道の 9 倍便利であることを表現している。

同様に、評価基準 c_2 (環境性), c_3 (費用) に注目した場合の一对比較行列 W_{c_2} , W_{c_3} も作成する。

$$W_{c_2} = \begin{matrix} & \begin{matrix} alt_1:トロリーバス & alt_2:モノレール & alt_3:鉄道 \end{matrix} \\ \begin{matrix} alt_1 \\ alt_2 \\ alt_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1/7 & 1/3 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 1/3 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}, \quad (3.6)$$

$$W_{c_3} = \begin{matrix} & \begin{matrix} alt_1:トロリーバス & alt_2:モノレール & alt_3:鉄道 \end{matrix} \\ \begin{matrix} alt_1 \\ alt_2 \\ alt_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1/5 & 1/7 \\ 5 & 1 & 1/2 \\ 7 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (3.7)$$

各一対比較行列の要素の数値は、意思決定者により提示されたものである。これらを利用して、重みベクトルと3つの評価値ベクトルを算出する。

一対比較行列 W の主固有ベクトル、つまり重みベクトルは、

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.466 \\ 0.433 \\ 0.100 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

である。

固有ベクトルを算出する際、同時に、一対比較行列 W の整合度も計測する。このときに使われる指標は C.I. (Consistency Index) と呼ばれる。この指標は、主固有ベクトルに対応する固有値 $\lambda_{\max}$ から次のように計算される。

$$\text{C.I.} = \frac{\lambda_{\max} - N}{N - 1}. \quad (3.9)$$

経験的に、C.I. が 0.1 以下なら一対比較行列は十分に整合しており、一対比較に問題はないと判断される。C.I. が 0.1 よりも大きい場合は、意思決定者に対して一対比較のやり直しを要求する等、一対比較の改善を行う場合がある。この例の一対比較行列の C.I. は 0.0028 ($\ll 0.1$) であるため、一対比較行列は十分に整合していると判断し、この固有ベクトル $\mathbf{b}$ を重みベクトルとして採用する。

一対比較行列 W_{c_1} , W_{c_2} , W_{c_3} についても固有ベクトルを算出する。それらはそれぞれ、

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 0.761 \\ 0.158 \\ 0.082 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0.088 \\ 0.669 \\ 0.243 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 0.075 \\ 0.333 \\ 0.592 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

である。C.I. は、それぞれ、0.001, 0.004, 0.007 となる。

さらに、代替案の評価ベクトル $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ から評価行列 A を構成する。

$$A = [\mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_3] = \begin{array}{c} alt_1 \text{ トローリーバス} \\ alt_2 \text{ モノレール} \\ alt_3 \text{ 鉄道} \end{array} \begin{array}{ccc} c_1: \text{利便性} & c_2: \text{環境性} & c_3: \text{費用} \\ \begin{bmatrix} 0.761 & 0.088 & 0.075 \\ 0.158 & 0.669 & 0.333 \\ 0.082 & 0.243 & 0.592 \end{bmatrix} \end{array}. \quad (3.11)$$

評価行列 A の 1 行 2 列目の要素は、評価基準 c_2 (環境性) からみた代替案 alt_1 (トローリーバス) の評価値が 0.088 と算出されたことを示している。

■**評価値の合成** 最後に評価値の合成を行い、総合評価値ベクトル $\mathbf{E}$ を算出する。

$$\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0.761 & 0.088 & 0.075 \\ 0.158 & 0.669 & 0.333 \\ 0.082 & 0.243 & 0.592 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.466 \\ 0.433 \\ 0.100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.401 \\ 0.397 \\ 0.203 \end{bmatrix}. \quad (3.12)$$

トロリーバス、モノレール、鉄道の総合評価値はそれぞれ 0.401, 0.397, 0.203 である。この意思決定では、最大の総合評価値をもつトロリーバスが採用されることとなる。

3.3 ANP

前節で記述した AHP では、3 層構造の最上層の総合目的から最下層の代替案まで、トップダウンに評価が行われた。評価基準の評価値は、総合目的からの視点により一意に決定され、重みベクトルは 1 つのみであった。しかし、視点を代替案からの評価に切り替え、この代替案から各評価基準をみて、評価基準の評価値を変化させる手続きを考えることもできる。これは、特に外部従属法と参照されることもあり、代替案が評価基準の評価値に影響を与えるような、上の階層の要素の評価値が下の階層の要素からの従属性をもつ場合に採用される。この外部従属法のうち、もっとも基本的なプロセスが ANP (Analytic Network Process) である [17]。

ANP では、評価基準の重みは総合目的から一意に決定されるのではなく、代替案ごとに決定される。つまり、重みベクトルが m 個算出される。一方、代替案の評価値は AHP と同じように評価基準ごとに算出され、評価行列が構成される。これら m 個の重みベクトルと評価行列を合成し総合評価値を算出するが、ANP では、評価値の合成を評価値の均衡により表現し算出する。

AHP と同様の手続きで得られる評価値行列を A とする。そして、 i 番目の代替案 alt_i からみた評価により得られた評価基準の重みベクトルを $\mathbf{w}_i$ とする。この重みベクトルは m 個ある。重みベクトル $\mathbf{w}_i$ を第 i 列に配列した行列を W とする。

$$W = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_1 & \mathbf{w}_2 & \cdots & \mathbf{w}_m \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

この行列 W は $n \times m$ 行列であり、 j 行 i 行目には、 i 番目の代替案 alt_i からみた j 番目の

評価基準 c_j の評価値が配列される.

この重みベクトルを並べた行列 W と評価行列 A をひとつの大きな $(n+m) \times (n+m)$ 行列 S に埋め込む.

$$S = \begin{bmatrix} 0 & W \\ A & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

そして, この行列 S の自乗の極限 S^* を用いて評価値の均衡を表現する.

$$S^* = \lim_{k \rightarrow \infty} S^{2k+1}. \quad (3.15)$$

行列の構成法より, 行列 S は各列の和が 1 になる確率遷移行列であり, 再帰性 (マルコフ性) をもつ. そのため, S^* は存在し, 安定して算出できる. また, 行列 S^* は行列 S と同じ形のブロック行列となる.

$$S^* = \begin{bmatrix} 0 & W^* \\ A^* & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

行列 A^* は同じベクトル n 個から, 行列 W^* 同じベクトル m 個から構成される.

$$A^* = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{a}^* & \cdots & \mathbf{a}^* \end{bmatrix}}_{n \text{ 個}}, \quad (3.17)$$

$$W^* = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{w}^* & \mathbf{w}^* & \cdots & \mathbf{w}^* \end{bmatrix}}_{m \text{ 個}}. \quad (3.18)$$

ANP において最終的に提示される総合評価値ベクトルは $\mathbf{a}^*$ である.

総合評価値を算出するために用いた行列 S は, 一般にスーパーマトリクスとして参照される.

3.4 代替案の追加による順位逆転

Belton and Gear[1] によって, 代替案を追加することにより, 総合評価値の順位の逆転が起きることが明らかにされた. これは, 以下のメカニズムより説明できる. 評価行列は列ベクトルの並びとして表現することができたが, 評価値の算出方法から, 各列ベクトルは正規化されていた. 総合評価値の合成は, 評価行列と重みベクトルの積とし

て表現されたが、これをあらためて列ベクトルの正規化を明示する形で表現しなおす。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{A}\mathbf{b} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \mathbf{b} \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{A}_1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_1} & \frac{\mathbf{A}_2}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_2} & \cdots & \frac{\mathbf{A}_n}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_n} \end{bmatrix} \mathbf{b} \quad (3.20)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_n} \end{bmatrix} \mathbf{b} \quad (3.21)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix} T\mathbf{b}. \quad (3.22)$$

ただし、

$$\mathbf{a}_i = \frac{\mathbf{A}_i}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, m), \quad (3.23)$$

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{A}_n} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

である。

この変形により、AHP の評価値の合成は、列が正規化されていない評価行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$ と重みベクトル $T\mathbf{b}$ の乗算であるとも解釈できる。また、行列 T は、重みベクトルを、各要素を異なる縮尺でスケール変換する変換行列であると解釈できる。

代替案の順位の逆転は、代替案の追加により、この変換行列 T が変化することが主な原因で起きる。代替案を新規に追加した場合、変換行列 T の要素が代替案の評価値の和であるため、もとの代替案のみに注目すると、行列 $\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{A}_2 & \cdots & \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$ の値が固定されたまま、変換行列 T のみが変わる。この結果、重みベクトル $T\mathbf{b}$ が変化し、総合評価値が変化する。追加する代替案の評価値が評価基準ごとに大きな差がある場合、この変化が総合評価値の順位を逆転させるように作用する。

この現象は Saaty[15] により, 見かけの重みベクトルが変化するという形で叙述的にまとめられたが, 本論文は変換行列を明示する形で示した. Saaty は代替案の追加により変化する重みベクトルを構造的評価基準 (structural criteria) と呼んだ. 構造的評価基準は, 式の上にのみ現れるみかけの評価基準であり, 本節では $T\mathbf{b}$ に相当する.

直接的には, 評価行列の各列を合計が 1 になるように正規化していることが原因であるが, 代替案の集合の変更により, $T\mathbf{b}$ を変化させるすべての構造が順位逆転の原因となる.

次章以降で, 順位逆転が起きないように改良された AHP を扱うが, その AHP では, 代替案の追加により変化する構造的評価基準は存在しない.

3.5 まとめ

本章では, 線形代数からみた構造を強調する形で AHP/ANP をあらためて記述した. 特に, 各要素の評価値が得られた後は, AHP は行列とベクトルの線形演算とその結果の正規化として解釈できる.

本論文では, AHP を, 規範的な意思決定のプロセスとしてとらえ, 記述している. しかし, 一対比較法の計算過程において固有ベクトルを扱うことから, 均衡モデルとしての表現と妥当性も与えられている [19][16][26].

第 4 章

支配型 AHP, 多重支配型 AHP の解析と解釈

4.1 支配型 AHP が開発された背景

支配型 AHP(Dominant AHP) [29][4][28] は AHP を改良した意思決定プロセスである。特に、次の 2 点が、AHP と比較した場合の、支配型 AHP を採用する際の利点となる。

- 代替案の追加により順位逆転が起きない。
- ある代替案を念頭におき、それをベンチマークや叩き台として利用し、評価を行うことができる。

支配型 AHP も、AHP と同じく、 n 個の評価基準に基づいて m 個の代替案の中から 1 つを選択するためのプロセスである。その際に、各代替案について各評価基準のスコアを与え、評価基準の重みを乗算し得られた総合評価値を算出する。選択される代替案は、この総合評価値が高い代替案である。

AHP では、重みベクトルは総合目的から一意に決定された。しかし、実際に意思決定法を適用する場面では、一意に決められた重みベクトルを、すべての代替案の総合評価値の合成に用いることに、常に納得が得られるとは限らない。そこで、ANP では、すべての代

替案を平等に扱い、代替案それぞれからみた重みベクトルを与え、総合評価値を算出した。

支配型 AHP は、意思決定に先立ち、意思決定者が恣意的に、意思決定のための支配関係を代替案の集合に与える。ここで与えられる支配関係は、代替案のモデルを表現するものではなく、意思決定プロセスを進めるための便宜的なものにすぎない。この代替案は、各評価に際して、比較のための叩き台、ベンチマークとして利用される。

この評価の叩き台としての代替案を**規制代替案**と呼ぶ^{*1}。各要素の評価は規制代替案との比較により、次のように実施される。

1. 各評価基準からみた代替案の評価値は、規制代替案からみて何倍かという数値が提示される。
2. 各評価基準の重みは、規制代替案を念頭に置いたとき、その重みがどのように分配されるかを計算する。

この評価の過程で、各評価基準からみた規制代替案の評価値は 1 となり、規制代替案の総合評価値は 1 となる。

AHP の評価では、各階層において、要素の組み合わせすべてについて一対比較を行っていたが、支配型 AHP では、規制代替案との比較のみで完結する。これは、要素同士の比較をコストととらえた場合、支配型 AHP を利用する際の大きな利点である。

このような評価を行う際には、どの代替案を規制代替案として採用しても、合成され出力される総合評価値は同じとなることが要請される。

^{*1} 評価値や重みを規制 (コントロールする) という意図でこのように名付けられた。

4.2 支配型 AHP の構成要素と評価原理

支配型 AHP では、意思決定者が便宜的または恣意的に選び出した規制代替案との比較によって評価行列や重みベクトルを決定し、それらを利用し、総合評価値の算出までを行う。

当然、意思決定者がどの代替案を規制代替案として選択するかによって総合評価値が変わるが、意思決定者の便宜的な選択によって結果が無秩序に変化するのは受け入れがたい。そこで、支配型 AHP は、次の原則を満たすように設計されている。

支配型 AHP の評価原則 ある特別な代替案さえ選択すれば、どの代替案を規制代替案として選択しようとも、各評価値、各重みは、その特別な代替案を規制代替案として採用した際の値から一意に決定される。

この評価原則で言及された特別な代替案を、規制代替案の評価値や重みを支配するという意味で、**支配代替案**と呼ぶ。支配代替案を定めた後は、どの代替案を規制代替案としても、総合評価値は一意に算出される。これら規制代替案による評価は支配代替案に対応して**服従代替案**と呼ぶ。

特に断りのない限り、支配代替案を d 番目の代替案 alt_d で表現し、この支配代替案に対応する評価基準の重みベクトルを $\mathbf{b}^d = [b_1^d, b_2^d, \dots, b_n^d]^\top$ と表現する。支配代替案が alt_d のときに、服従代替案 alt_i からみた重みベクトルを $\mathbf{b}^{i:d} = [b_1^{i:d}, b_2^{i:d}, \dots, b_n^{i:d}]^\top$ 、総合評価値を $\mathbf{e}^{i:d} = [e_1^{i:d}, e_2^{i:d}, \dots, e_m^{i:d}]^\top$ と表現する。

ここで、本研究を進めるにあたって、評価値についてひとつの仮定を置く。

仮定 1. どの代替案を支配代替案として採用しようとも、評価行列は一定とする。

抽象的な概念であることが多い評価基準についての評価と異なり、評価行列は具体的なモノ（代替案）を想定しての評価から構成さる。そのため、代替案についての評価は評価値の誤差やブレが少ないと考えられる。この理由により、この仮定については一定の妥当性

が得られている [28][27].

この仮定を採用し, 支配型 AHP の手続き全般について, 評価行列を前章と同じく, $m \times n$ 行列 A により表現する.

また, 本章で新たに, 行列 A の k 行目の行ベクトルの要素を対角要素にもつ行列 A_k を導入する.

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{k1} & & \\ 0 & \ddots & 0 \\ & & a_{kn} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

行列の積 AA_k^{-1} は, 行列 A の各要素を, 同じ列の第 k 行目の要素の値で除算して得られる行列を表現する.

服従代替案での評価は, 支配代替案の評価から一意に決まると述べたが, 両者の関係は推定定理という形で表現できる*2.

定理 1. 推定定理

- 服従代替案 alt_i からみた重みベクトルは, 次のように推定される.

$$\mathbf{B}^{i:d} = A_i A_d^{-1} \mathbf{b}^d. \quad (4.2)$$

あるいは, 重みベクトルが正規化されていることを強調する場合は次のようになる.

$$\mathbf{b}^{i:d} = \frac{\mathbf{B}^{i:d}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^{i:d}}. \quad (4.3)$$

- 服従代替案 alt_i からみた評価行列は, 次のように推定される.

$$AA_i^{-1}. \quad (4.4)$$

式 (4.2) は, 要素ごとに表現すると,

$$b_j^{i:d} = \frac{a_{ij}}{a_{dj}} b_j^d, \quad (4.5)$$

$$b_j^d : b_j^{i:d} = a_{dj} : a_{ij} \quad (4.6)$$

*2 参考文献 [28] では推定ルールとして参照されている.

となり, これは, 支配代替案からみた評価基準 c_j の重み b_j^d と服従代替案からみた重み $b_j^{i:d}$ の比は, 評価基準 c_j からみた支配代替案の評価値 a_{dj} と服従代替案の評価値 a_{ij} の比と等しいことを意味している.

また, 式 (4.4) は, 要素ごとに表現すると,

$$\frac{a_{ij}}{a_{dj}} \quad (4.7)$$

となり, すべての評価基準 c_j にたいして, 服従代替案 alt_k の評価値が, 支配代替案 alt_d の評価値の何倍かという数値で表現されることを意味している.

これらの, 重みベクトルと評価基準の推定定理は, 支配代替案の評価から服従代替案の評価への一意の変換を表現する関係としては自然なものである.

4.3 支配型 AHP の総合評価値の算出

支配代替案が alt_d , 服従代替案が alt_i のとき, 支配型 AHP では以下のように総合評価値が算出される.

$$\mathbf{e}^{i:d} = (AA_i^{-1})\mathbf{b}^{i:d} \quad (4.8)$$

$$= \frac{(AA_i^{-1})(A_i A_d^{-1})\mathbf{b}^d}{\mathbf{1}^\top (AA_i^{-1})(A_i A_d^{-1})\mathbf{b}^d} \quad (4.9)$$

$$= \frac{AA_d^{-1}\mathbf{b}^d}{\mathbf{1}^\top AA_d^{-1}\mathbf{b}^d}. \quad (4.10)$$

式 (4.4) から推定される評価行列と, 式 (4.2) から推定される重みベクトルの積で総合評価値ベクトルが表現されていることが確認できる.

支配代替案を固定すると, 評価行列 A が一定なら総合評価値は支配代替案のみに依存し, 服従代替案の選択に影響されない. そのため, 特に断りのない限り, d 番目の代替案が支配代替案の場合の総合評価値を単に $\mathbf{e}^d$ と記述する.

4.3.1 数値例

ここで確認のために数値を提示して支配型 AHP の総合評価値の算出手法を示す.

3章の例題を利用する。ある自治体に、トロリーバス、モノレール、鉄道のいずれかの交通システムを導入することを考える。評価基準は利便性、環境性、費用とする。

■問題の階層化 構成要素をあらためて示すと、代替案の集合は $Alt=\{alt_1, alt_2, alt_3\}=\{\text{トロリーバス, モノレール, 鉄道}\}$, 評価基準の集合は $C=\{c_1, c_2, c_3\}=\{\text{利便性, 環境性, 費用}\}$ である。また、ベンチマークとして用いる支配代替案を鉄道 (alt_3) とする。これは、他の代替案との比較が容易だと思われる代替案であり、意思決定者が便宜的に選択してよい。

これら構成要素を図 4.1 のように階層構造の中に配置する。

■要素の評価 次に、支配代替案 (鉄道 = alt_3) からみた評価基準の重みを決定する。支配代替案を念頭におき、評価基準同士を一対比較し、一対比較行列 W^3 を構成する。

$$W^3 = \begin{matrix} & \begin{matrix} c_1:\text{利便性} & c_2:\text{環境性} & c_3:\text{費用} \end{matrix} \\ \begin{matrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1/5 & 1/4 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (4.11)$$

この一対比較行列の主固有ベクトルを計算し、支配代替案 (鉄道 = alt_3) からみた重みベクトル $\mathbf{b}^3=[0.466, 0.433, 0.100]^T$ が得られる。

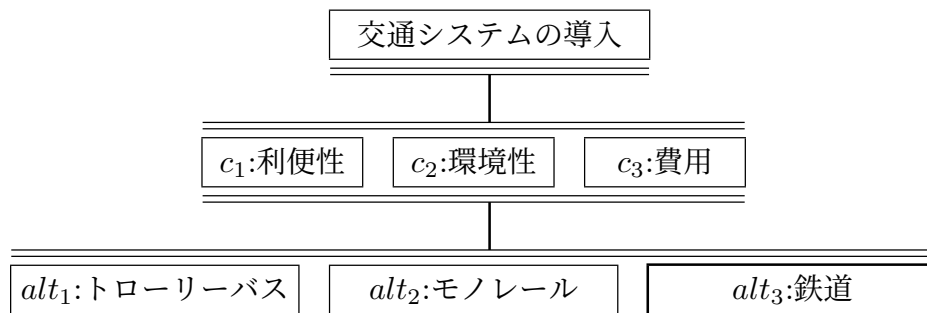


図 4.1 数値例: 交通システム導入のための支配型 AHP の階層構造.

そして、支配代替案から見た比を提示することにより、評価行列 A を構成する。

$$A = \begin{array}{c} alt_1 \text{ トローリーバス} \\ alt_2 \text{ モノレール} \\ alt_3 \text{ 鉄道} \end{array} \begin{array}{ccc} c_1: \text{利便性} & c_2: \text{環境性} & c_3: \text{費用} \\ \left[\begin{array}{ccc} 8 & 1/3 & 1/8 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \right] \end{array} \quad (4.12)$$

評価行列 A において、基準となる支配代替案の評価値はすべて 1 である。例えば、行列 A の 1 行 2 列目の要素 $1/3$ は、トローリーバスの環境性についての評価値が鉄道からみて $1/3$ 倍であることを表現している。

■評価値の合成 ここで、服従代替案をトローリーバス (alt_1) としたときの総合評価値を計算する。服従代替案トローリーバス (alt_1) からみた重みベクトル $\mathbf{B}^{1:e}$, $\mathbf{b}^{1:3}$ は式 (4.2), (4.3) の推定原理より次のように推定される。

$$\mathbf{B}^{1:3} = A_1 A_3^{-1} \mathbf{b}^3 \quad (4.13)$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.466 \\ 0.433 \\ 0.100 \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

$$= \begin{bmatrix} 3.372 \\ 0.144 \\ 0.013 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\mathbf{b}^{1:3} = \frac{\mathbf{B}^{1:3}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^{1:3}} = \begin{bmatrix} 0.957 \\ 0.037 \\ 0.003 \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

一方、服従代替案トローリーバス (alt_1) からみた評価行列は式 (4.4) の推定原理より次のように推定される。

$$AA_1^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 1/3 & 1/8 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/8 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 9 & 4 \\ 1/8 & 3 & 8 \end{bmatrix}. \quad (4.18)$$

総合評価値 $\mathbf{E}^{1:3}$ は次のように算出される.

$$\mathbf{E}^{1:3} = (AA_1^{-1})\mathbf{b}^{1:3} \quad (4.19)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1/4 & 9 & 4 \\ 1/8 & 3 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.957 \\ 0.037 \\ 0.003 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.000 \\ 0.587 \\ 0.257 \end{bmatrix}. \quad (4.20)$$

正規化を行うと

$$\mathbf{e}^{1:3} = \frac{\mathbf{E}^{1:3}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{E}^{1:3}} = \begin{bmatrix} 0.542 \\ 0.318 \\ 0.140 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

となる.

服従代替案がモノレール (alt_2) の場合は, 服従代替案からみた重みベクトル $\mathbf{B}^{2:3}$, $\mathbf{b}^{2:3}$, 評価行列 AA_2^{-1} , 総合評価値 $\mathbf{E}^{2:3}$, 正規化された総合評価値 $\mathbf{e}^{2:3}$ は, それぞれ次のようになる.

$$\mathbf{B}^{2:3} = A_2 A_3^{-1} \mathbf{b}^3 \quad (4.22)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.466 \\ 0.433 \\ 0.100 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.933 \\ 1.299 \\ 0.050 \end{bmatrix}, \quad (4.24)$$

$$\mathbf{b}^{2:3} = \frac{\mathbf{B}^{2:3}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^{2:3}} = \begin{bmatrix} 0.409 \\ 0.569 \\ 0.022 \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

$$AA_2^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 1/3 & 1/8 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1/9 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 2 \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

$$\mathbf{E}^{2:3} = (AA_2^{-1}) \mathbf{b}^{2:3} \quad (4.28)$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 1/9 & 1/4 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.409 \\ 0.569 \\ 0.022 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.704 \\ 1.000 \\ 0.438 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{e}^{2:3} = \frac{\mathbf{E}^{2:3}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{E}^{2:3}} = \begin{bmatrix} 0.542 \\ 0.318 \\ 0.140 \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

服従代替案が支配代替案鉄道 (alt_3) の場合は、重みベクトル $\mathbf{B}^{3:3}$, $\mathbf{b}^{3:3}$, 評価行列 AA_3^{-1} , 総合評価値 $\mathbf{E}^{3:3}$, 正規化された総合評価値 $\mathbf{e}^{3:3}$ は、それぞれ次のようになる。

$$\mathbf{B}^{3:3} = A_3 A_3^{-1} \mathbf{b}^3 \quad (4.31)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.466 \\ 0.433 \\ 0.100 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$= \begin{bmatrix} 0.466 \\ 0.433 \\ 0.100 \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

$$\mathbf{b}^{3:3} = \frac{\mathbf{B}^{3:3}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^{3:3}} = \begin{bmatrix} 0.466 \\ 0.433 \\ 0.100 \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

$$AA_3^{-1} = \begin{bmatrix} 8 & 1/3 & 1/8 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 1/3 & 1/8 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\mathbf{E}^{3:3} = (AA_3^{-1}) \mathbf{b}^{3:3} \quad (4.37)$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 1/3 & 1/8 \\ 2 & 3 & 1/2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.466 \\ 0.433 \\ 0.100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.889 \\ 2.282 \\ 1.000 \end{bmatrix}, \quad (4.38)$$

$$\mathbf{e}^{3:3} = \frac{\mathbf{E}^{3:3}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{E}^{3:3}} = \begin{bmatrix} 0.542 \\ 0.318 \\ 0.140 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

以上, 支配代替案が鉄道 (alt_3) の場合についての数値例だが, 支配代替案を固定しておけば, 服従代替案をどの代替案にしようとも, 総合評価値が等しいことが確認できる ($\mathbf{e}^{1:3} = \mathbf{e}^{2:3} = \mathbf{e}^{3:3}$).

4.4 多重支配型 AHP

前節までは、支配代替案が 1 つの場合に絞って解説を行ったが、意思決定者が複数存在する場合や、慎重のために評価の視点を複数もつ場合等、支配代替案が複数提示される場合も考えられる。

支配型 AHP では、支配代替案の数だけ重みベクトルと総合評価値ベクトルが算出される。意思決定の手続きとしては、これら複数の支配代替案が提示されたとしても、意思決定者の同意を損なうことなく、一意に重みベクトルと総合評価値が定まることが望ましい。

そのような要請に応える重みベクトルと総合評価値の算出手法がいくつか提案されている。代表的な手法として、平均をとることにより異なるベクトルを一つのベクトルに収束させていくというアプローチから CCM(一斉法) が、すべての支配代替案における比較を一つの巨大な一対比較行列で表現しその均衡から答えを求める超一対比較行列 等が提案されている。

次節において、この支配代替案が複数ある場合について、このようなベクトルの統合が可能となる条件を分析する。

以降、本論文で、 k 個の支配代替案があるという場合には、簡単のために、代替案の並びの 1 番目から k 番目までが支配代替案とする。このような並び替えを行っても、議論の結論は変わらない。

本章のこれより以降の記述が、本研究において新規に提示された結果をまとめたものである。

まず、重みベクトルの自由度を示し、その自由度を用いて推定原理、CCM の解、ANP と支配型 AHP との関係について考察する。

4.5 互換性の分析

本節では, 重みベクトルの互換性について分析を行う.

定義 1. 重みベクトルの組 $\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^k\}$ が次の性質をもつとき, これらの重みベクトルには**互換性**があるという.

$$\mathbf{e}^1 = \mathbf{e}^2 = \dots = \mathbf{e}^k. \quad (4.40)$$

ここで, 本章の主要な定理を示す.

定理 2. k 個の互換性のある重みベクトルは $(k-1)(n - \text{rank}(A)) + n$ 個のパラメータで表現できる. これらのパラメータの線形結合を正規化し重みベクトルを得る.

つまり, 重みベクトルは無限に存在し, その自由度は $(k-1)(n - \text{rank}(A)) + n$ である. 特に, $\text{rank}(A) = n$ の場合, この自由度は n である.

また, ただちに, すべての代替案を支配代替案として採用する特殊な場合についての次の系が得られる.

系 1. すべての代替案を支配代替案と採用した場合, これら代替案に対応する重みベクトルのすべてが互換性をもつとき, これらの重みベクトルは $(m-1)(n - \text{rank}(A)) + n$ 個のパラメータで表現できる.

支配型 AHP のプロセスには正規化が存在し, 正規化の非線形性が, 互換性のある重みベクトルを求めることを複雑にしている. しかし, 次の補題により, 重みベクトルの集合を扱う場合には, 正規化を無視できる. この補題は, 正規化されていない互換性のある重みベクトルの集合は, 各要素を正規化すれば, 正規化された互換性のあるベクトルの集合と等しくなることを主張する.

集合 V を, 互換性のある, 正規化されてない重みベクトルの組の集合とする; $V = \{(\mathbf{B}^1, \mathbf{B}^2, \dots, \mathbf{B}^k) | A\mathbf{A}_1^{-1}\mathbf{B}^1 = A\mathbf{A}_2^{-1}\mathbf{B}^2 = \dots = A\mathbf{A}_k^{-1}\mathbf{B}^k, \quad \mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^k \in \mathbb{R}_+^n\}$.

集合 $\dot{V}$ を, 集合 V のすべての要素 (組) について, その組の要素を正規化した集合とす

る; $\dot{V} = \{(\frac{\mathbf{B}^1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^1}, \dots, \frac{\mathbf{B}^k}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^k}) | (\mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^k) \in V\}$.

集合 v を, 互換性のある, 正規化されている重みベクトルの組の集合とする; $v = \{(\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^k) | \frac{AA_1^{-1}\mathbf{b}^1}{\mathbf{1}^\top AA_1^{-1}\mathbf{b}^1} = \frac{AA_2^{-1}\mathbf{b}^2}{\mathbf{1}^\top AA_2^{-1}\mathbf{b}^2} = \dots = \frac{AA_k^{-1}\mathbf{b}^k}{\mathbf{1}^\top AA_k^{-1}\mathbf{b}^k}, \mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^k \in \mathbb{Q}_n\}$.

補題 1. $\dot{V} = v$.

証明. $(\frac{\mathbf{B}^1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^1}, \dots, \frac{\mathbf{B}^k}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^k}) \in \dot{V}$ とする. 各 $\frac{\mathbf{B}^i}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^i}$ は, 集合 $\mathbb{Q}_n$ の要素であり,

$$\frac{AA_i^{-1}\frac{\mathbf{B}^i}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^i}}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\frac{\mathbf{B}^i}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^i}} = \frac{AA_i^{-1}\mathbf{B}^i}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{B}^i} \text{ が成り立つ. 一方, } AA_1^{-1}\mathbf{B}^1 = \dots = AA_k^{-1}\mathbf{B}^k \text{ であるか}$$

ら, $(\frac{\mathbf{B}^1}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^1}, \dots, \frac{\mathbf{B}^k}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^k})$ は, 集合 v の要素である. すなわち, $\dot{V} \subseteq v$ である.

$v' = \{(\frac{\mathbf{b}^1}{\mathbf{1}^\top AA_1^{-1}\mathbf{b}^1}, \dots, \frac{\mathbf{b}^k}{\mathbf{1}^\top AA_k^{-1}\mathbf{b}^k}) | (\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k) \in v\}$ とする. 集合 v' は集合 V の部分集合である; $v' \subset V$. ($\because$ 集合 V の定義において, $\frac{\mathbf{b}^i}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{b}^i}$ を $\mathbf{B}^i$ と置き換える.)

ここで, 2つの関数 T と S を導入する.

$T: v \ni (\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^k) \mapsto (\tau_1(\mathbf{x}^1), \dots, \tau_m(\mathbf{x}^k))$ であり, $\tau_i(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{x}}$ である.

$S: v' \ni (\mathbf{y}^1, \dots, \mathbf{y}^k) \mapsto (\sigma(\mathbf{y}^1), \dots, \sigma(\mathbf{y}^k))$ であり, $\sigma(\mathbf{y}) = \frac{\mathbf{y}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{y}}$ である.

関数 T は, 集合 v から集合 v' への関数である ($T: v \rightarrow v'$). 関数 S は, 集合 v' から集合 $\dot{V}$ への関数である ($S: v' \rightarrow \dot{V}$, $\because v' \subset V$). ゆえに, $S \cdot T: v \rightarrow \dot{V}$ である.

もし集合 $\mathbb{Q}_n$ の要素 $\mathbf{x}, \mathbf{s}$ について $\sigma(\tau_i(\mathbf{x})) = \sigma(\tau_i(\mathbf{s}))$ ならば, $\mathbf{x} = \mathbf{s}$ である.

$$\because \sigma(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{x}}) = \sigma(\frac{\mathbf{s}}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{s}}), \frac{\frac{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{x}}{\mathbf{1}^\top \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{x}}}}{\mathbf{1}^\top \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{x}}} = \frac{\frac{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{s}}{\mathbf{1}^\top \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{s}}}}{\mathbf{1}^\top \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{1}^\top AA_i^{-1}\mathbf{s}}}, \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{x}} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{1}^\top \mathbf{s}}.$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{Q}_n$ より $\mathbf{1}^\top \mathbf{x} = \mathbf{1}^\top \mathbf{s} = 1$. これは, $\mathbf{x}$ が集合 $\mathbb{Q}_n$ の要素ならば, $\sigma(\tau_i(\mathbf{x}))$ が単射であることを意味する. それゆえ, $S \cdot T$ も単射である.

$v \supseteq \dot{V}$ であり, かつ, v から $\dot{V}$ への単射 ($S \cdot T$) が存在するので, $\dot{V} = v$ である. $\square$

以下, 定理 2 を導出する.

ベクトル $\mathbf{B}^d = \left[B_1^d B_2^d \dots B_n^d \right]^\top$ を, d 番目の代替案 alt_d が支配代替案のときの, 正規化をしていない重みベクトルとする. $\mathbf{B}^d \in \mathbb{R}_+^n$ である. また, ベクトル $\mathbf{E}^d =$

$\begin{bmatrix} E_1^d E_2^d \cdots E_m^d \end{bmatrix}$ を, d 番目の代替案 alt_d が支配代替案のときの, 正規化をしていない総合評価値ベクトルとする.

ベクトル $\mathbf{E}^d$ は次のように算出される.

$$\mathbf{E}^d = AA_d^{-1} \mathbf{B}^d. \quad (4.41)$$

このベクトルの各要素は次のように算出される.

$$E_i^d = \sum_{j=1}^n \frac{a_{ij}}{a_{dj}} B_j^d. \quad (4.42)$$

このとき, 式 (4.40) の互換性は次のように表現することができる.

$$\mathbf{E}^d = \mathbf{E}^{d+1}, \quad d = 1, \dots, k-1. \quad (4.43)$$

$$AA_d^{-1} \mathbf{B}^d - AA_{d+1}^{-1} \mathbf{B}^{d+1} = 0. \quad (4.44)$$

この関係は, 次の大きな連立方程式で表現することができる.

$$\mathcal{A} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_1 & -\mathcal{A}_2 & & & \\ & \mathcal{A}_2 & -\mathcal{A}_3 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \mathcal{A}_{k-2} & -\mathcal{A}_{k-1} \\ & & & \mathcal{A}_{k-1} & -\mathcal{A}_k \end{bmatrix} \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.45)$$

ここで, $\mathbf{w} = [B_1^1 \cdots B_n^1 B_1^2 \cdots B_n^2 \cdots B_1^k \cdots B_n^k]^\top$ であり, また

$$\mathcal{A}_d = AA_d^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a_{11}}{a_{d1}} & \frac{a_{12}}{a_{d2}} & \cdots & \frac{a_{1n}}{a_{dn}} \\ \frac{a_{21}}{a_{d1}} & \frac{a_{22}}{a_{d2}} & \cdots & \frac{a_{2n}}{a_{dn}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{m1}}{a_{d1}} & \frac{a_{m2}}{a_{d2}} & \cdots & \frac{a_{mn}}{a_{dn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{d1}} \mathbf{a}_1 & \cdots & \frac{1}{a_{dn}} \mathbf{a}_n \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

である.

連立方程式 (4.45) は $m(k-1)$ 個の斉次式からなり, 変数の数は kn 個である. $\mathcal{A}_d$ は A の各列に非零のスカラを乗じた行列なので (式 (4.46)), $\text{rank}(\mathcal{A}_d) = \text{rank}(A)$ である. また, 行列 $\mathcal{A}$ の形から $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{A}_1) + \cdots + \text{rank}(\mathcal{A}_{k-1}) = (k-1)\text{rank}(A)$ である. 連立方程式 (4.45) の自由変数の数は $\mathcal{A}$ の零空間の次元であり, それは $kn - \text{rank}(\mathcal{A}) = kn - (k-1)\text{rank}(A) = (k-1)(n - \text{rank}(A)) + n$ である. これで定理 2 が得られた.

■行列 A が最大階数を持つ場合 ($\text{rank}(A) = n$) 行列 A の LU 分解を $A = LU$ とし, 連立方程式 $A\mathbf{w} = 0$ にガウスの消去法の前進消去等を適用し, 同値な連立方程式 $U\mathbf{w} = 0$ が得られたとする. ここで,

$$U = \begin{bmatrix} \mathcal{U}_1 & -\mathcal{U}_2 & & & \\ & \mathcal{U}_2 & -\mathcal{U}_3 & & 0 \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & \mathcal{U}_{k-2} & -\mathcal{U}_{k-1} \\ & & & \mathcal{U}_{k-1} & -\mathcal{U}_k \end{bmatrix}, \quad (4.47)$$

$$U_d = UA_d^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a_{d1}}\mathbf{u}_1 & \cdots & \frac{1}{a_{dn}}\mathbf{u}_n \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

である. もし $\text{rank}(A) = n$ ならば, 定理 2 より, この連立方程式には n 個の自由変数がある. つまり, ベクトル $\mathbf{w}$ から n 個の要素を自由変数として選択し, 任意の値を与えて解を構成できる.

そこで, 連立方程式 (4.45) の最後の m 個の方程式の解 $\mathbf{B}^k$ を自由変数する. ベクトル $\mathbf{B}^k$ を $\mathbf{t}' = [t'_1 \cdots t'_n]^\top \in \mathbb{R}_+^n$ と置き換える.

$$\mathbf{B}^k = \mathbf{t}' \quad (B_1^k = t'_1, \quad B_2^k = t'_2, \quad \cdots, \quad B_n^k = t'_n). \quad (4.49)$$

連立方程式の他の方程式の解は後退代入により得ることができる.

$$UA_{k-1}^{-1}\mathbf{B}^{k-1} - UA_k^{-1}\mathbf{t}' = 0, \quad \mathbf{B}^{k-1} = A_{k-1}A_k^{-1}\mathbf{t}'. \quad (4.50)$$

$\therefore \text{rank}(U) = n, U(A_{k-1}^{-1}\mathbf{B}^{k-1} - A_k^{-1}\mathbf{t}') = 0$ iff $(A_{k-1}^{-1}\mathbf{B}^{k-1} - A_k^{-1}\mathbf{t}') = 0$.

さらに, $\mathbf{B}^i = A_iA_{i+1}^{-1}\mathbf{B}^{i+1}$ と, 式 (4.50) の $\mathbf{B}^{k-1}$ より,

$$\mathbf{B}^i = A_iA_k^{-1}\mathbf{t}' \quad (B_j^i = \frac{a_{ij}}{a_{kj}}t'_j), \quad i = 1, \cdots, k-2. \quad (4.51)$$

あらためて $\mathbf{t} = A_k^{-1}\mathbf{t}'$ ($[t_1, \cdots, t_n]^\top = \left[\frac{t'_1}{a_{k1}}, \cdots, \frac{t'_n}{a_{kn}} \right]^\top$) と自由変数を置き換えると,

$$\mathbf{B}^i = A_i\mathbf{t} \quad (B_j^i = a_{ij}t_j), \quad i = 1, \cdots, k. \quad (4.52)$$

が得られる.

正規化することにより, 最終的に, 互換性のある重みベクトルは次のようになる.

$$\mathbf{b}^i = \frac{\mathbf{B}^i}{\mathbf{1}^\top \mathbf{B}^i} = \frac{A_i \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{t}}, \quad (b_j^i = \frac{a_{ij} t_j}{\sum_{\zeta=1}^n a_{i\zeta} t_\zeta}). \quad (4.53)$$

定理 3. もし $\text{rank}(A) = n$ ならば, 互換性のある重みベクトル $\mathbf{b}^i$ は, ある n 次元ベクトル $\mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^n$ を用いて, $\mathbf{b}^i = \frac{A_i \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{t}}$ と表現できる.

正規化された総合評価値は次のように表現できる.

$$\mathbf{e}^d = \frac{AA_d^{-1} \mathbf{b}^d}{\mathbf{1}^\top AA_d^{-1} \mathbf{b}^d} = \frac{AA_d^{-1} \frac{A_d \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_d \mathbf{t}}}{\mathbf{1}^\top AA_d^{-1} \frac{A_d \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_d \mathbf{t}}} = \frac{AA_d^{-1} A_d \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top AA_d^{-1} A_d \mathbf{t}} = \frac{A \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A \mathbf{t}}, \quad (4.54)$$

要素ごとの表現では

$$e_i^d = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} t_j}{\sum_{\xi=1}^m \sum_{j=1}^n a_{\xi j} t_j}. \quad (4.55)$$

となる.

式 (4.54)(4.55) の右辺に支配代替案に依存する項 (d を添字にもつ項) が存在しないことから, 総合評価値は, どの支配代替案にどの代替案を選択するかに依存しないことが分かる.

定理 4. もし $\text{rank}(A) = n$ ならば, 総合評価値は, どの代替案を支配代替案に選択するかに依存せず, ある n 次元ベクトル $\mathbf{t} \in \mathbf{R}_+^n$ が存在して, $\frac{A \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A \mathbf{t}}$ と表現できる.

4.6 互換性と推定定理

定理 3 より, もし $\text{rank}(A) = n$ ならば, ある重みベクトル $\mathbf{b}^i$ から重みベクトル $\mathbf{b}^k$ を次のように推定できる.

定理 5. もし $\text{rank}(A) = n$ ならば,

$$\mathbf{b}^k = \frac{A_k A_i^{-1} \mathbf{b}^i}{\mathbf{1}^\top A_k A_i^{-1} \mathbf{b}^i}. \quad (4.56)$$

証明. $\mathbf{b}^i = \frac{A_i \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{t}}$ ($\because$ 定理 3), $\frac{A_k A_i^{-1} \mathbf{b}^i}{\mathbf{1}^\top A_k A_i^{-1} \mathbf{b}^i} = \frac{A_k A_i^{-1} \frac{A_i \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{t}}}{\mathbf{1}^\top A_k A_i^{-1} \frac{A_i \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{t}}} = \frac{A_k \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_k \mathbf{t}} = \mathbf{b}^k. \quad \square$

式 (4.56) は推定定理と名付けられ, 支配型 AHP の前提として導入されている [28].

式 (4.56) が必ず成立するのは, $\text{rank}(A) = n$ のときであるため, 重みベクトルに互換性があっても推定定理が成立しない場合が存在する. $\text{rank}(A) < n$ の場合, 定理 2 より, n 次元ベクトル $\mathbf{t}$ と非零のあるベクトル $\boldsymbol{\delta}^i$ を用いて, ベクトル $\mathbf{b}^i = \frac{A_i \mathbf{t} + \boldsymbol{\delta}^i}{\mathbf{1}^\top [A_i \mathbf{t} + \boldsymbol{\delta}^i]}$ と $\mathbf{b}^k = \frac{A_k \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_k \mathbf{t}}$ を互換にできる. しかし, これは推定定理を満たさない.

$$\frac{A_k A_i^{-1} \mathbf{b}^i}{\mathbf{1}^\top A_k A_i^{-1} \mathbf{b}^i} = \frac{A_k A_i^{-1} \frac{A_i \mathbf{t} + \boldsymbol{\delta}^i}{\mathbf{1}^\top [A_i \mathbf{t} + \boldsymbol{\delta}^i]}}{\mathbf{1}^\top A_k A_i^{-1} \frac{A_i \mathbf{t} + \boldsymbol{\delta}^i}{\mathbf{1}^\top [A_i \mathbf{t} + \boldsymbol{\delta}^i]}} = \frac{A_k \mathbf{t} + A_k A_i^{-1} \boldsymbol{\delta}^i}{\mathbf{1}^\top [A_k \mathbf{t} + A_k A_i^{-1} \boldsymbol{\delta}^i]} \neq \mathbf{b}^k. \quad (4.57)$$

系 2. 推定定理が成り立つための十分条件は, 重みベクトルが互換性を持つこと, かつ, $\text{rank}(A) = n$ である.

4.7 AHP/ANP との同値性

ANP と支配型 AHP の関係 支配型 AHP の評価行列 A と重みベクトルの組 $\{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^m\}$ を ANP (Analytic Network Process) [17] への入力とすることを考える. この場合, ANP の解 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^\top, \mathbf{y} = [y_1, \dots, y_m]^\top$ は次の関係を保持する.

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{b}^1 \dots \mathbf{b}^m \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix}. \quad (4.58)$$

ただし,

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}. \quad (4.59)$$

$\text{rank}(A) = n$ の場合を考える. 定理 3 より, $\mathbf{b}^i$ は n 次元ベクトル $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_n]^\top$ を用いて $\frac{A_i \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{t}}$ と表現できる. ここで, $x_j = t_j$, $y_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} t_j$, $\sum_{i=1}^m a_{i1} = 1, \dots, \sum_{i=1}^m a_{in} = 1$ とおくと, 式 (4.58) は次のように展開される.

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} & \frac{a_{11}t_1}{\sum_{j=1}^n a_{1j}t_j} & \frac{a_{21}t_1}{\sum_{j=1}^n a_{2j}t_j} & \cdots & \frac{a_{m1}t_1}{\sum_{j=1}^n a_{mj}t_j} \\ & \frac{a_{12}t_2}{\sum_{j=1}^n a_{1j}t_j} & \frac{a_{22}t_2}{\sum_{j=1}^n a_{2j}t_j} & \cdots & \frac{a_{m2}t_2}{\sum_{j=1}^n a_{mj}t_j} \\ & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & \frac{a_{1n}t_n}{\sum_{j=1}^n a_{1j}t_j} & \cdots & & \frac{a_{mn}t_n}{\sum_{j=1}^n a_{mj}t_j} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & & a_{mn} \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \\ \sum_{j=1}^n a_{1j}t_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}t_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}t_j \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_{i1}}{\sum_{j=1}^n a_{ij}t_j} \sum_{j=1}^n a_{ij}t_j \right) t_1 \\ \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_{i2}}{\sum_{j=1}^n a_{ij}t_j} \sum_{j=1}^n a_{ij}t_j \right) t_2 \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^m \left(\frac{a_{in}}{\sum_{j=1}^n a_{ij}t_j} \sum_{j=1}^n a_{ij}t_j \right) t_n \\ \sum_{j=1}^n a_{1j}t_j \\ \sum_{j=1}^n a_{2j}t_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}t_j \end{bmatrix}. \tag{4.60}
\end{aligned}$$

$\sum_{i=1}^m a_{i1} = 1, \cdots, \sum_{i=1}^m a_{in} = 1$ のとき、この式の等号は成立する。これは、評価行列 A の各列が正規化されていることを意味する。この場合、式 (4.58) の $\mathbf{y}$ を正規化すると支配

型 AHP の総合評価値となる.

つまり, 評価行列 A が正規化された列からなり, $\text{rank}(A) = n$ ならば, 支配型 AHP の重みベクトルの内部パラメータ t と総合評価値は ANP の解となる.

定理 6. もし評価行列 A の各列が正規化されており, かつ, $\text{rank}(A) = n$ ならば, 支配型 AHP の総合評価値と互換性のある重みベクトルの内部ベクトルは ANP の解として表現される.

これは, [3][6] に示された関係 '支配型 AHP + ANP = 支配型 AHP' の別の表現である.

4.8 考察

木下と関谷 [5] は, CCM の出力が必ず収束し, この手続きが必ず互換性のある重みベクトルを出力することを証明した. それにより, 同時に, 互換性のある重みベクトルが必ず存在することを示した. 本章では, 互換性という条件に注目するかぎりにおいて, そのような可能な出力は無限にあり, その自由度が $(k-1)(n - \text{rank}(A)) + n$ 個のパラメータで表現できることを示した. この結果は, 支配型 AHP を分析する上で重要なツールとなることが期待される.

また, 本章では, たとえ重みベクトルが互換性をもっているとしても, 支配型 AHP の推定定理を満たさない場合があることを示した. ただし, この場合にも適切にパラメータを調整することにより, この規則を満たすようにすることができる. そして, もし $\text{rank}(A) = n$ ならば, その調整すらも不要であることを示した (系 2).

$\text{rank}(A) = n$ の場合には, 互換性のある重みベクトルは単純な形で表現できる. そして, もし $n > m$ ならば, $\text{rank}(A) \neq n$ であり, 自由度は必ず n よりも大きくなる. これは, 評価基準の依存関係のみならず, 評価基準の数と代替案の数にも注意を向けなければならないことと, 評価行列の階数 $\text{rank}(A)$ を計算すべきであることを示唆している.

本章で扱った $\text{rank}(A) = n$ の場合の各定理の証明について, 各行列 A_i は対角行列で

あったが, これらは $\text{rank}(AA_i^{-1}) = \text{rank}(A)$ を満たしさえあれば, 同じ結果を導出できる. つまり, もし $\text{rank}(A)$ を保存するなら, 行列 A_i は対角行列でなくともよい. 行列 A_i が対角行列である理由は, 支配代替案の評価値との比を意思決定者が提示するためであった. しかし, 例えば, 意思決定者が支配代替案との関係を平面図上の位置関係で指し示すような場合には, 一般の変換行列の方が便利なる場合もある. これは, 支配型 AHP の, 評価行列 A を構築するプロセスを拡張できることを期待させる.

式 (4.54) では, もし $\mathbf{t}$ が正規化されているならば, 支配型 AHP の総合評価値が, ベクトル $\mathbf{t}$ を重みベクトルとしてもつ従来の AHP[14] の総合評価値と等しいことを示している. その一方で, もし $\text{rank}(A) = n$ であり, かつ, $\mathbf{b}$ が従来の AHP の重みベクトルであるならば, それから推定される重みベクトル $\mathbf{b}^i = \frac{A_i \mathbf{b}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{b}}$ は, 支配型 AHP の互換性をもつ重みベクトルとなる. これが, 定理 6 のような, 従来の AHP と支配型 AHP の同値性の原因となっていると考えられる.

第 5 章

CCM(一斉法) の解析と解釈

本章では、特に断らない限り $\text{rank}(A) = n$ とする。CCM(Concurrent Convergence Method, 一斉法)[28] は、多重支配型 AHP において、支配代替案が複数提示された場合について、それら代替案に対応する重みベクトルを統合する手続きである。意思決定者が初期値として互換性のないベクトルの組を CCM へ入力すると、CCM は互換性のあるベクトルの組を出力する。CCM のアルゴリズムを アルゴリズム 2 に示す。

アルゴリズム 2 CCM(Concurrent Convergence Method, 一斉法)

Input: $\{\beta^1, \dots, \beta^k\}, \epsilon$

Output: $\{\hat{\mathbf{b}}_{CCM}^1, \dots, \hat{\mathbf{b}}_{CCM}^k\}$.

- 1: $\mathbf{b}_0^i := \beta^i, i = 1, \dots, k$.
 - 2: $t := 0$.
 - 3: **repeat**
 - 4: **for all** $i \in \{1, \dots, k\}$ **do**
 - 5: $\mathbf{b}_{t+1}^i := \frac{1}{k} \sum_{\xi=1}^k \frac{A_i A_{\xi}^{-1} \mathbf{b}_t^{\xi}}{\mathbf{1}^{\top} A_i A_{\xi}^{-1} \mathbf{b}_t^{\xi}}$. (ベクトルの平均を計算する)
 - 6: **end for**
 - 7: **until** $\max_{\zeta \in \{1, \dots, k\}} \|\mathbf{b}_{t+1}^{\zeta} - \mathbf{b}_t^{\zeta}\| < \epsilon$
 - 8: $\hat{\mathbf{b}}_{CCM}^i := \mathbf{b}_t^i, k = 1, \dots, k$.
-

従来までの研究として, CCM は必ず互換性のあるベクトルを出力することが示されている [5]. この存在性と定理 3 より, $\text{rank}(A) = n$ の場合, CCM の出力はある n 次元ベクトル $\mathbf{t}_{CCM}$ を用いて表現することができる.

定理 7. もし $\text{rank}(A) = n$ ならば, ある n 次元ベクトル $\mathbf{t}_{CCM}$ を用いて, CCM により出力される重みベクトルを次のように表現できる.

$$\hat{\mathbf{b}}_{CCM}^i = \frac{A_i \mathbf{t}_{CCM}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{t}_{CCM}}, \quad i = 1, \dots, k. \quad (5.1)$$

定理 2 より, 重みベクトルは無限に存在するため, この重みを探すことは多次元の最適化問題とみなすことができる. CCM が出力する解 $\{\hat{\mathbf{b}}_{CCM}^1, \dots, \hat{\mathbf{b}}_{CCM}^k\}$ は無限に存在する解のひとつであるため, 解の最適性を検証しなければならない.

ここで, 重みベクトルの最適性を検証するための簡単な距離関数を導入する.

$$\text{dist}(\hat{\mathbf{b}}^1, \dots, \hat{\mathbf{b}}^k; \boldsymbol{\beta}^1, \dots, \boldsymbol{\beta}^k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k (\hat{b}_j^i - \beta_j^i)^2, \quad (5.2)$$

$$\text{dist}^*(\hat{\mathbf{b}}^1, \dots, \hat{\mathbf{b}}^k; \boldsymbol{\beta}^1, \dots, \boldsymbol{\beta}^k) = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^k \left(\frac{\frac{a_{ij} \hat{b}_j^l}{a_{lj}}}{\mathbf{1}^\top A_i A_l^{-1} \hat{\mathbf{b}}^l} - \frac{\frac{a_{ij} \beta_j^l}{a_{lj}}}{\mathbf{1}^\top A_i A_l^{-1} \boldsymbol{\beta}^l} \right)^2 \quad (5.3)$$

これらは, 出力ベクトルの組 $\hat{\mathbf{b}}^i$ と, 入力ベクトルの組 $\boldsymbol{\beta}^i$ との差の二乗和である. 関数 dist^* は, 推定定理によって推定されるベクトルで計算する総合評価値同士の差についての情報も加味している.

ここで, 数値例を用いて, CCM が必ずしも最適解を出力しない例を提示する.*¹

$$\text{入力: } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \frac{3}{8} & 32 \\ \frac{1}{8} & 1 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}^1 = \begin{bmatrix} 0.520 \\ 0.480 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}^2 = \begin{bmatrix} 0.510 \\ 0.490 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta}^3 = \begin{bmatrix} 0.530 \\ 0.470 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\text{出力 } \hat{\mathbf{b}}_{CCM}^1 = \begin{bmatrix} 0.775 \\ 0.225 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{b}}_{CCM}^2 = \begin{bmatrix} 0.039 \\ 0.961 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{b}}_{CCM}^3 = \begin{bmatrix} 0.865 \\ 0.135 \end{bmatrix}, \quad (5.5)$$

$$\text{距離関数の値 } \text{dist} = 0.798, \quad \text{dist}^* = 1.315. \quad (5.6)$$

¹ ここで用いる評価行列 A , 重みベクトル $\boldsymbol{\beta}^i$, CCM が出力する解 $\hat{\mathbf{b}}_{CCM}^i$ は, 論文 [20] 内の Appendix 1 の数値例である. dist と dist^ については, 本論文の著者が計算した.

次に、この数値例で、距離関数を最小にする最適解を提示する.*2

$$\hat{\mathbf{b}}_{ref}^1 = \begin{bmatrix} 0.615 \\ 0.385 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{b}}_{ref}^2 = \begin{bmatrix} 0.018 \\ 0.982 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{b}}_{ref}^3 = \begin{bmatrix} 0.762 \\ 0.238 \end{bmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\text{距離関数の値 } dist = 0.609, \quad dist^* = 1.151. \quad (5.8)$$

アルゴリズム 2 において、ベクトルの平均を求める正規化を伴う計算が $\mathbf{b}_t^i$ を非線形に変化させ、この正規化が原因で、CCM の出力が最適ではなくなっている (図 5.1). このことを次節で考察する.

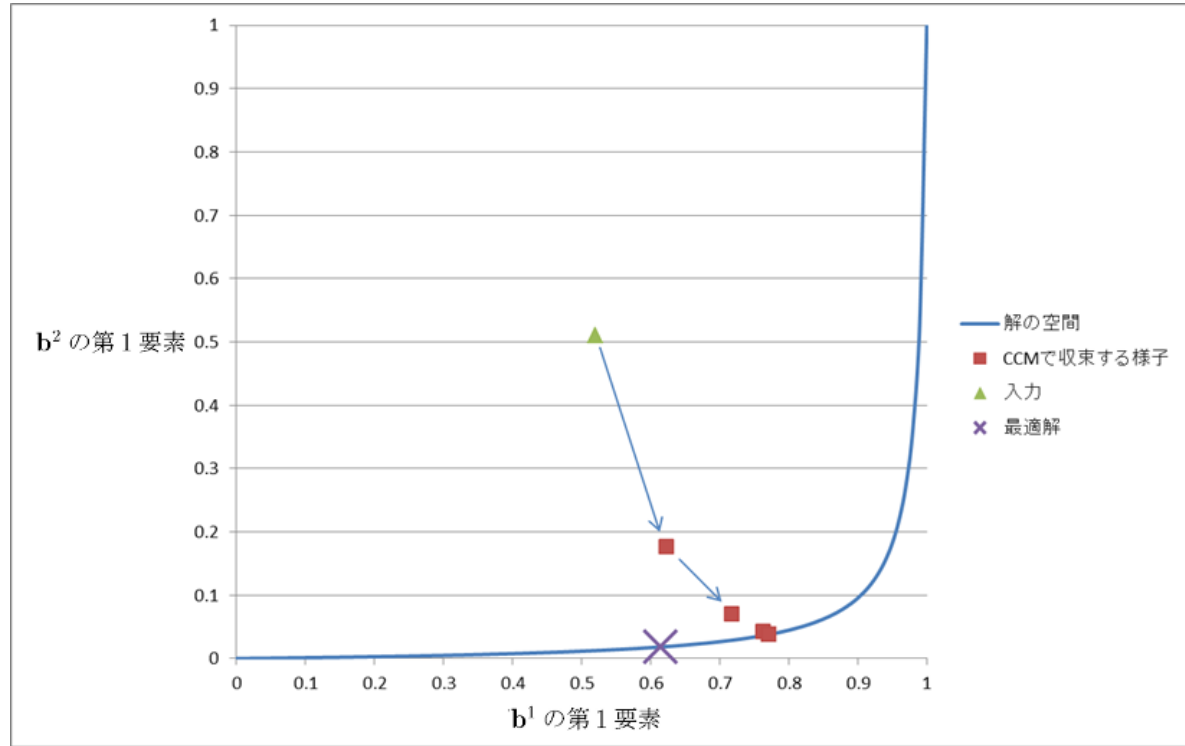


図 5.1 CCM において、解が収束する様子.

2 最適解 $\hat{\mathbf{b}}_{ref}^i$ は $A_i \mathbf{t}$ で表現される. $\mathbf{t} = [0.615, 0.385]^\top$ であり、これは 2 次元 Newton's 法により、 $\frac{\partial dist^}{\partial t_j} = 0$ を満たす数値を探索した.

5.1 最適化問題としての重みベクトルの探索

意思決定者が提示した (互換性のない) 重みベクトルの組を $\{\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^k\}$ とする. 互換性があり, かつ, このベクトルの組にもっとも近いベクトルの組 $\{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^k\}$ を探索する. この要求は最適化問題として次のように定義できる.

$$\begin{aligned} \text{find } & \{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^k\} \\ & \min \delta(\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k; \beta^1, \dots, \beta^k). \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\text{s.t. } \{\mathbf{b}^1, \mathbf{b}^2, \dots, \mathbf{b}^k\} \text{ は互換性をもつ.} \quad (5.10)$$

ここで, 関数 $\delta(\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k; \beta^1, \dots, \beta^k)$ は最適化における目的関数である. 入力と可能解の近さを表現する適切な距離関数を採用する. この最適化問題は, 目的関数の定義ごとに異なる解をもつ.

$\text{rank}(A) = n$ の場合には, 重みベクトルの組み合わせが互換性をもつことと, 重みベクトルの組み合わせが共通の内部ベクトルをもつことは同値なので, 最適化問題は次のように表現できる.

$$\begin{aligned} \text{find } & \mathbf{t} \\ & \min \delta(\mathbf{t}; \beta^1, \dots, \beta^k). \end{aligned} \quad (5.11)$$

調整するベクトルが n 次元ベクトル 1 つになった上, 最適化の過程において互換性を考慮する必要がなくなった. ここで, 関数 $\delta(\mathbf{t}; \beta^1, \dots, \beta^k)$ は, ベクトル $\mathbf{t}$ に注目した距離関数である. 具体的には, 最適解 $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{t}_1, \hat{t}_2, \dots, \hat{t}_n]^\top$ は $\frac{\partial \delta(\mathbf{t}; \beta^1, \dots, \beta^k)}{\partial t_j} \Big|_{t_j = \hat{t}_j} = 0$ を満たすベクトル $\hat{\mathbf{t}}$ として算出される. 互換性のある重みベクトルは $\mathbf{b}^i = \frac{A_i \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{t}}$ となる.

以下の議論では, 特に断らない限り $\text{rank}(A)$ とする.

補題 1 より, 空間 $\mathbb{R}_n$ 上で探索を行い見つけた解を最後に正規化しても, 空間 $\mathbb{Q}_+^n$ 上のみで探索を行っても, 互換性は変わらない. そこで, $\mathbf{b}^i = A_i \mathbf{t}$, $\mathbf{b}^i, \mathbf{t} \in \mathbb{R}_+^n$ として, まず空間 $\mathbb{R}_+^n$ で探索を行い最後に正規化する手法を想定する.

■**目的関数** $dist$ 計算が簡単な目的関数として先の距離関数 $dist$ と同等の関数を考える.

$$dist(\mathbf{t}; \beta^1, \dots, \beta^k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i - \beta_j^i)^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (a_{ij}t_j - \beta_j^i)^2 \quad (5.12)$$

この目的関数を最小とするベクトル $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n]^\top$ は次式で計算できる.

$$\hat{t}_j = \frac{\sum_{i=1}^k a_{ij} \beta_j^i}{\sum_{i=1}^k (a_{ij})^2}. \quad (5.13)$$

■**t の推定値の平均** 重みベクトル $\mathbf{b}^i = [b_1^i, b_2^i, \dots, b_n^i]^\top$ に互換性があり, 正規化されていないことを仮定する場合, $\mathbf{b}^i = A_i \mathbf{t}$ と表現できることから, その内部ベクトル $\mathbf{t} = [t_1, \dots, t_n]^\top$ は次式で推測できる.

$$t_j = \frac{b_j^i}{a_{ij}}. \quad (5.14)$$

各 β^i について内部ベクトル $\mathbf{t}$ を推定し, その推定値との差の二乗和を目的関数として定義する.

$$dist_{mean}(\mathbf{t}; \beta^1, \dots, \beta^k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left(t_j - \frac{b_j^i}{a_{ij}} \right)^2 \quad (5.15)$$

最適解は次式で計算できる.

$$\hat{\mathbf{t}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k A_i^{-1} \beta^i. \quad (5.16)$$

■**t の推定値の幾何平均** 各 β^i について内部ベクトル $\mathbf{t}$ を推定し, ベクトルの各要素について対数を取り, その対数の差の二乗和を目的関数として定義する.

$$dist_{g-mean}(\mathbf{t}; \beta^1, \dots, \beta^k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left(\ln t_j - \ln \frac{\beta_j^i}{a_{ij}} \right)^2. \quad (5.17)$$

最適解は次式で計算できる.

$$\hat{t}_j = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k a_{ij}^{-1} \beta_j^i}. \quad (5.18)$$

この最適解 $\hat{\mathbf{t}} = [\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_n]^\top$ は幾何平均 CCM の解の一つである [23].

定理 8. 互換性のあるベクトルのうち, $\text{dist}_{g\text{-mean}}(\mathbf{t}; \beta^1, \dots, \beta^k)$ を最小化するベクトルは幾何平均 CCM の解を構成する.

証明. 多重支配型 AHP における幾何平均 CCM は以下の式で算出される.

$$b_j^d = \frac{\sqrt[k]{\prod_{i=1}^k a_{dj} a_{ij}^{-1} \beta_j^i}}{\sum_{\zeta=1}^n \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k a_{d\zeta} a_{i\zeta}^{-1} \beta_{\zeta}^i}}. \quad (5.19)$$

一方, 次式のように変形できる.

$$b_j^d = \frac{\sqrt[k]{\prod_{i=1}^k a_{dj} a_{ij}^{-1} \beta_j^i}}{\sum_{\zeta=1}^n \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k a_{d\zeta} a_{i\zeta}^{-1} \beta_{\zeta}^i}} \quad (5.20)$$

$$= \frac{a_{dj} \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k a_{ij}^{-1} \beta_j^i}}{\sum_{\zeta=1}^n a_{d\zeta} \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k a_{i\zeta}^{-1} \beta_{\zeta}^i}} \quad (5.21)$$

$$= \frac{a_{dj} \hat{t}_j}{\sum_{\zeta=1}^n a_{d\zeta} \hat{t}_{\zeta}}. \quad (5.22)$$

□

5.2 正規化について

以上の最適化は, 空間 $\mathbb{R}_+^n$ 上で探索を行いその後に正規化を行った. その際, 正規化した後もそれが最適解であるという仮定を暗に置いていた. しかし, 一般にはこれは成り立たない.

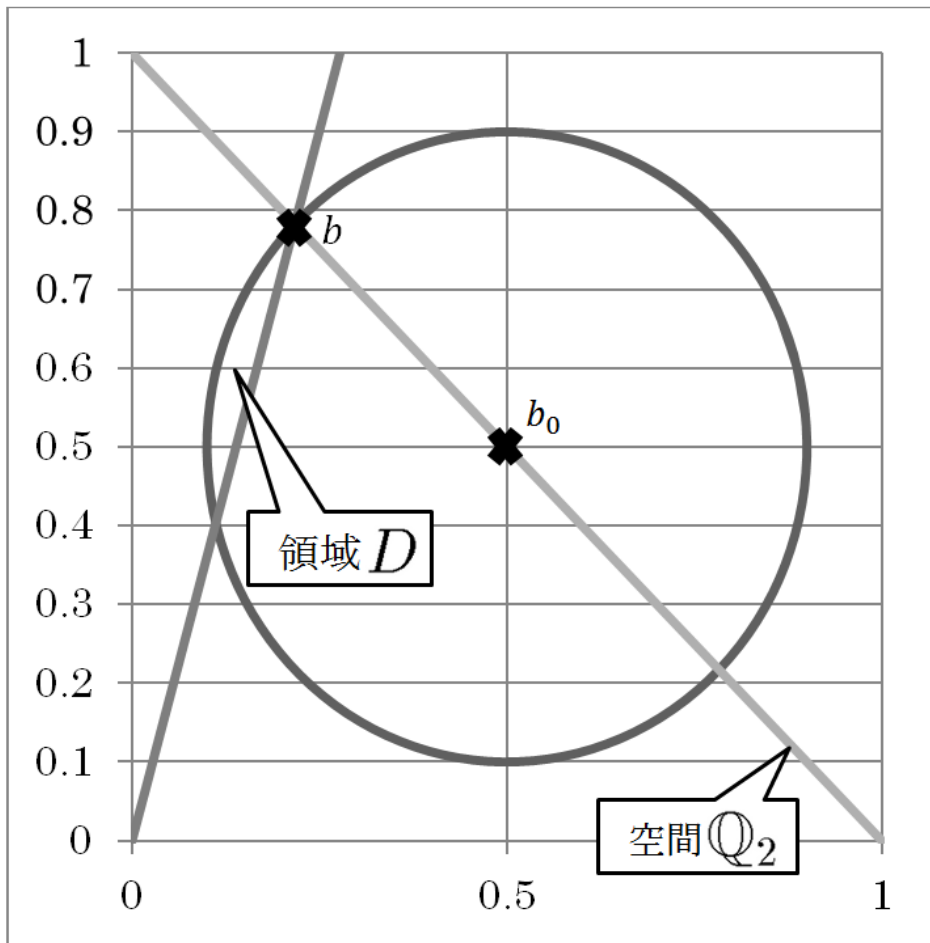
ベクトル $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_0$ を空間 $\mathbb{Q}_n$ 上のベクトル, ベクトル $\mathbf{b}'$ を空間 $\mathbb{R}_+^n$ のベクトルとする. このとき, $|\mathbf{b}' - \mathbf{b}_0| < |\mathbf{b} - \mathbf{b}_0|$ であるが, $\left| \frac{\mathbf{b}'}{\mathbf{1}^\top \mathbf{b}'} - \mathbf{b}_0 \right| > |\mathbf{b} - \mathbf{b}_0|$ となる $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}'$ の組み合わせが存在する.

例えば, $n = 2$ では次の例が存在する (図 5.2). $\mathbf{b} = [0.22, 0.78]^\top$, $\mathbf{b}_0 = [0.50, 0.50]^\top$, $\mathbf{b}' = [0.15, 0.60]^\top$ で, 距離を通常のユークリッド距離とすると $|\mathbf{b} - \mathbf{b}_0| = 0.40$, $|\mathbf{b}' - \mathbf{b}_0| = 0.36$, $\left| \frac{\mathbf{b}'}{\mathbf{1}^\top \mathbf{b}'} - \mathbf{b}_0 \right| = 0.42$ となる. 前述の目的関数のように, ベクトル間の各要素の差の二乗和を用いて最適性を評価する場合には, 正規化により解の最適性が損なわれる場合がある. そこで, このような正規化による最適性の損失を避けるために, はじめから正規化さ

れた空間 $\mathbb{Q}_n$ 上で最適化を行うことを考える. これは $\mathbf{b}^i = \frac{A_i \mathbf{t}}{\mathbf{1}^\top A_i \mathbf{t}}$ として $\mathbf{b}^i$ と β^i の目的関数を最小にする $\mathbf{t}$ を探索することに対応する.

■正規化を考慮した単純な目的関数 次の目的関数を考える.

$$d(\mathbf{t}; \beta^1, \dots, \beta^k) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (b_j^i - \beta_j^i)^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n \left(\frac{a_{ij} t_j}{\sum_{\zeta=1}^n a_{i\zeta} t_\zeta} - \beta_j^i \right)^2. \quad (5.23)$$



図は, 空間 $\mathbb{R}_+^2$ (2次元平面の一部) と空間 $\mathbb{Q}_2$ (左上から右下へ伸びる直線) を示している. 点 $\mathbf{b}_0$ を基準としたとき, 領域 D (点 $\mathbf{b}_0$ を中心とする円をかこまれた領域) 内の点は, 空間 $\mathbb{R}_+^2$ 内では点 $\mathbf{b}$ より距離が小さいが, 正規化した空間 $\mathbb{Q}_2$ へ射影すると点 $\mathbf{b}$ より距離が大きくなる.

図 5.2 正規化により距離の大小が逆転する例 ($n = 2$).

目的関数は d_{simple} と同じであるが, $\mathbf{b}^i$ と $\mathbf{t}$ との関係が異なっている. これだけの変更であるが, 解を算出する式ははるかに複雑となる. $n = 2$ の場合について, ニュートン法を利用した, 最適解 $\hat{\mathbf{t}} = [t, (1 - t)]^\top$ の算出法を示す.

$$t_{step+1} := t_{step} - \frac{\partial d}{\partial t} / \frac{\partial^2 d}{\partial t^2}. \quad (5.24)$$

この更新を, $|t_{step+1} - t_{step}| < \epsilon$ を満たすまで繰り返す. ただし,

$$\frac{\partial d}{\partial t} = 2 \sum_{d,i} \frac{a_{d1} a_{d2}}{[(a_{d1} - a_{d2})t + a_{d2}]^2} \left[\frac{(a_{d1} + a_{d2})t - a_{d2}}{(a_{d1} - a_{d2})t + a_{d2}} - \frac{a_{d1} a_{i1}^{-1} \beta_1^i - a_{d2} a_{i2}^{-1} \beta_2^i}{\mathbf{1}^\top A_d A_i^{-1} \boldsymbol{\beta}^i} \right], \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 d}{\partial t^2} &= 4 \sum_{d,i} (-1) \frac{a_{d1} a_{d2} (a_{d1} - a_{d2})}{[(a_{d1} - a_{d2})t + a_{d2}]^3} \left[\frac{(a_{d1} + a_{d2})t - a_{d2}}{(a_{d1} - a_{d2})t + a_{d2}} - \frac{a_{d1} a_{i1}^{-1} \beta_1^i - a_{d2} a_{i2}^{-1} \beta_2^i}{\mathbf{1}^\top A_d A_i^{-1} \boldsymbol{\beta}^i} \right] \\ &\quad + \frac{a_{d1}^2 a_{d2}^2}{[(a_{d1} - a_{d2})t + a_{d2}]^4}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

■従来型 CCM が想定した目的関数 各支配型代替案について, その支配型代替案から推定定理を用いて他の代替案を支配型代替案としたときの評価基準の重みベクトルを推定し, そのすべての推定されたベクトルとの差の二乗和を目的関数とする.

$$d(\mathbf{t}; \boldsymbol{\beta}^1, \dots, \boldsymbol{\beta}^k) = \sum_{d=1}^k \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left[\frac{a_{dj} a_{ij}^{-1} b_j^i}{\mathbf{1}^\top A_d A_i^{-1} \mathbf{b}^i} - \frac{a_{dj} a_{ij}^{-1} \beta_j^i}{\mathbf{1}^\top A_d A_i^{-1} \boldsymbol{\beta}^i} \right]^2. \quad (5.27)$$

この目的関数においては, 導出がさらに複雑になるため, 一般には, ニュートン法やその他の最適化手法を用いて最適解を算出する. 従来型 CCM では, 逐次法により算出を行っていたが, 各ステップにおいて空間 $\mathbb{R}_+^n$ 上でベクトルの平均をとり移動量を算出しベクトルを調整し, その度にその調整したベクトルを正規化し空間 $\mathbb{Q}_n$ 上へ射影していた. 前述のように, 正規化は互換性を保つが距離の大小関係は保たないため, 従来型 CCM は差の二乗和を最小にしないという意味で, 必ずしも最適解を出力しない.

5.3 考察

厳密な最適解を出力するためには、空間 $\mathbb{Q}_n$ の上のみで最適化を行うべきであるが、算出の過程が複雑になり、意思決定者の理解や納得性が損なわれることが考えられる。実際の運用に際しては、意思決定者は正規化の問題点を確認した上で、簡潔性と厳密性を考慮して最適化手法を選択すべきである。

本章では主に $\text{rank}(A) = n$ の場合について議論した。この条件 $\text{rank}(A) = n$ は、多重支配型 AHP にとって、互換性を持つ重みベクトルの組み合わせを簡単な形で表現でき (定理 2)、また、互換性が成り立てば支配型 AHP における推定定理 [7] も成り立つ条件という特別な意味を持つ [5]。定理 3 より、 $\text{rank}(A) \neq n$ の場合であっても本稿で提示した手法から得られる重みベクトルは互換性を持つ。しかし、この場合には n 次元ベクトルでは解のすべてを表現できないため、その解は互換性を持つが最適解とは限らない。ゆえに、最適化を行う際には、評価行列の階数を確認する必要がある。

また、本章では、評価基準の重みベクトルのみが不安定で、評価行列はどの代替案を支配代替案に採用しても安定であり固定されていると仮定した。その前提により、互換性を持つように重みベクトルを調整することは、 $\text{rank}(A) = n$ の場合に、 n 次元のベクトル最適化問題に帰着された。しかし、一般には、評価基準の重みベクトルだけではなく、評価行列も不安定で複数存在し、これら評価行列の互換性を考慮しなければならない場合が考えられる。これらを研究するにあたって、本稿の結果 (ある評価行列を固定した場合の定理、正規化についての補題と考察) は重要なツールとなることが期待される。

第 6 章

超一対比較法の解析と解釈

多重支配型 AHP において、総合評価値を合成する手法として CCM[30]、幾何平均 CCM[23] 等が提案されているが、本章では超一対比較行列による方法についての解析/解釈を行う。超一対比較行列は、多重支配型 AHP で用いるすべての比較結果を要素としてもつ巨大な行列として提案された [11][24]。

■表記法 超一対比較行列は要素数が多いため、表記が煩雑となる。この煩雑さを避けるために、添字を極力使用しない形で表記する。そこで、あらためて表記法を記載する。

有限集合 Set の要素数は $|Set|$ と表記する。ベクトル $\mathbf{x}$ の同値類を $[\mathbf{x}]$ と表記する。もし $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in [\mathbf{x}]$ ならば、 $\mathbf{x} = k\mathbf{x}'$, $k \in \mathbb{R}$ であることを意味する。 $[\mathbf{x}]_i$ は同値類 $[\mathbf{x}]$ の第 i 番目の要素である。アンダーラインを引いた行列やベクトルは、各要素を逆数とした行列やベクトルを表現する。 $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ の場合、 $\underline{\mathbf{x}} = [\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \dots, \frac{1}{x_n}]^T$ である。 I_n は 1 から n までを要素としてもつ集合を表現する; $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$ 。

評価基準の集合、代替案の集合は前章までと同様にそれぞれ C , Alt と記載する。特に断らない限りはアルファベット c は個々の評価基準を、 a は個々の代替案を表現する。

6.1 絶対的重要度

本章では, 絶対的重要度 V の存在を仮定する. これは, 意思決定者が行う評価を関数として抽象化したものである.

$$V : C \times Alt \rightarrow \mathbb{R}_+. \quad (6.1)$$

$V(c, a)$ は実数値であり, 評価基準 c についての代替案 a の評価値を表現する.

この絶対的重要度 V は, 評価基準の集合と代替案の集合を固定しているときには, ベクトル $\mathbf{v}$ として表現しても差し支えない. このベクトルを絶対的重要度ベクトルと呼び, V と同一視する. $\mathbf{v}$ は $|C||Alt|$ 個の要素からなるベクトルである; $\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_{|C||Alt|}]^\top$. 各要素 v_i は $V(c, a)$ に対応し, $i = \iota(c, a)$ である. 関数 ι は評価基準・代替案のペアと添字との 1 対 1 対応を表現する.

$$\iota : C \times Alt \rightarrow I_{|C||Alt|}. \quad (6.2)$$

この 1 対 1 対応により, 絶対的重要度の値 $V(c, a)$ は, 絶対的重要度ベクトルの要素 $v_{\iota(c, a)}$ と同一視できる. 以降, 混乱のない限り, 関数としての絶対的重要度, 絶対的重要度の値, 絶対的重要度ベクトル, 絶対的重要度ベクトルの要素を絶対的重要度と呼ぶ.

この絶対的重要度を用いて超一対比較行列を定義する.

6.2 超一対比較行列

絶対的重要度 v_i と v_j の関係 r_{ij} を次のように定義する.

$$r_{ij} = \frac{v_i}{v_j}. \quad (6.3)$$

関係 r_{ij} は絶対的重要度の相対値であり, 次が成り立つ.

$$r_{ij} = \begin{cases} 1/r_{ji} & (\text{if } r_{ji} \neq \perp) \\ \perp & (\text{if } r_{ji} = \perp) \end{cases}, \quad (6.4)$$

$$r_{ii} = 1. \quad (6.5)$$

ここで, 記号 $\perp$ は未定義を意味する. 実際の運用に際しては, 意思決定者は $\perp$ を便宜的な数で置き換える. これらの関係は, 意思決定者が比較による評価を行うため, 絶対的重要度の相対値のみが得られることと, その相対値のいくつかは得られない場合があることに対応している. もし, 相対値 r_{ij} が $\perp$ でなければ, この値は**定義されている**と表現し, それ以外の場合 ($r_{ij} = \perp$) は**未定義である**と表現する.

定義 2. 値 r_{ij} を, i 行 j 列目に配列した $|C||Alt| \times |C||Alt|$ 行列を**超一対比較行列** (*Super Pairwise Comparison Matrix, SPCM*) と呼ぶ.

ここで, r_{ij} は絶対的重要度 v_i の v_j からみた相対値である; $r_{ij} = v_i/v_j$.

超一対比較行列のすべての要素が定義されており, かつ, 誤差がないとき ($r_{ij} = v_i/v_j$), その超一対比較行列は**整合している**と表現する.

ある超一対比較行列 R が整合しているとき, 行列 R はベクトル $\mathbf{v}$ とベクトル $\mathbf{v}$ の積として表現できる.

$$R = \mathbf{v}\mathbf{v}^\top. \quad (6.6)$$

ある超一対比較行列が与えられたとき, 意思決定者は, 絶対的重要度の同値類 $[\mathbf{v}]$ をその行列から構成することを目指す. 代替案 a の総合評価値 E_a は, この同値類を用いて次

のように表現できる.

$$E_a = \sum_{c \in C} [\mathbf{v}]_{\iota(c,a)}. \quad (6.7)$$

または, すべての代替案に共通するある定数 F が存在して

$$e_a = \frac{1}{F} \sum_{c \in C} v_{\iota(c,a)} \quad (6.8)$$

と表現できる.

本章では, どのような超一対比較行列なら同値類 $[\mathbf{v}]$ を構成できるかに興味をおく. ここで, 超一対比較行列 R の定義された要素の添字の集合を S とする; $S = \{(i, j) | r_{ij} \neq \perp, r_{ij} \text{ は } R \text{ の要素であり, } i, j \in I_{|C||Alt|}\}$.

定義 3. 次のいずれかの条件を満たす添字のペア (組) を, **合理的に比較可能**と表現する.

- もし $(i, j) \in S$ ならば, ペア $((i, j), (i, j))$ は合理的に比較可能である.
- もし $(i, h), (h, j) \in S$ ならば, ペア $((i, h), (h, j))$ は合理的に比較可能である.
- もし $(i, h), (h, k), (k, j) \in S$ ならば, ペア $((i, h), (k, j))$ は合理的に比較可能である.
- もし, ペア $((i', h'), (i'', h''))$ が合理的に比較可能であり, かつ, $(i, h), (h, i') \in S$ ならば, ペア $((i, h), (i'', h''))$ は合理的に比較可能である.

定理 9. もし, r_{ih}, r_{kj} が整合している超一対比較行列 R の要素であり, かつ, ペア $((i, h), (k, j))$ が合理的に比較可能ならば, v_i/v_j は計算可能である.

証明. 定義より $r_{ij} = v_i/v_j$ なので, v_i/v_j は ペア (r_{ij}, r_{ij}) を用いて算出できる.

もし $(i, h), (h, j) \in S$ ならば, v_i/v_j は $r_{ih}r_{hj} = \frac{v_i}{v_h} \frac{v_h}{v_j}$ として算出できる.

もし $(i, h), (h, k), (k, j) \in S$ ならば, v_i/v_j は $r_{ih}r_{hk}r_{kj} = \frac{v_i}{v_h} \frac{v_h}{v_k} \frac{v_k}{v_j}$ として算出できる.

もし, $v_{i'}/v_{h''}$ をペア $(r_{i'h'}, r_{i''h''})$ から算出でき, かつ, (i, h) と (h, i') が S の要素ならば, $v_i/v_{h''}$ は $r_{ih}r_{hi'}v_{i'}/v_{h''} = \frac{v_i}{v_h} \frac{v_h}{v_{i'}}(v_{i'}/v_{h''})$ として算出できる. $\square$

定理 10. もし, 超一対比較行列 R が次の条件を満たすならば, 同値類 $[\mathbf{v}]$ は行列 R より

構成できる.

$$\forall i \in I_{|C||Alt|}, \exists t \exists s, [((1, s), (i, t)) \text{ は合理的に比較可能である}], \quad (6.9)$$

または,

$$\forall j \in I_{|C||Alt|}, \exists s \exists t, [((s, 1), (t, j)) \text{ は合理的に比較可能である}]. \quad (6.10)$$

証明. もし条件 (6.9) が満たされるならば, すべての $i \in I_{|C||Alt|}$ について, $\frac{v_1}{v_i}$ を次のように算出できる. $\exists t, \frac{v_1}{v_t} \frac{1}{r_{it}} = \frac{v_1}{v_t} \frac{v_t}{v_i}$. (定理 9 より, $((1, s), (i, t))$ は合理的に比較可能なので, $\frac{v_1}{v_t}$ を算出できる.) ベクトル $\mathbf{w} = [\frac{v_1}{v_1}, \frac{v_1}{v_2}, \dots, \frac{v_1}{v_{|C||Alt|}}]^\top$ を得ることができ, $\underline{\mathbf{w}} = \frac{1}{v_1} \mathbf{v} \in [\mathbf{v}]$ である.

もし条件 (6.10) が満たされるならば, すべての $j \in I_{|C||Alt|}$ について, $\frac{v_1}{v_j}$ を次のように算出できる. $\exists s, \frac{1}{r_{s1}} \frac{v_s}{v_j} = \frac{v_1}{v_s} \frac{v_s}{v_j}$. (定理 9 より, $((s, 1), (t, j))$ は合理的に比較可能なので, $\frac{v_s}{v_j}$ を算出できる.) ベクトル $\mathbf{y} = [\frac{v_1}{v_1}, \frac{v_1}{v_2}, \dots, \frac{v_1}{v_{|C||Alt|}}]^\top$ を得ることができ, $\underline{\mathbf{y}} = \frac{1}{v_1} \mathbf{v} \in [\mathbf{v}]$ である. □

6.3 絶対的重要度を用いた支配型 AHP の解釈

超一対比較行列と支配型 AHP の同値性を分析するために, 絶対的重要度を用いて支配型 AHP を表現する.

次のシナリオにより支配型 AHP の総合評価値を算出する場合を考える.

Step1 意思決定者が, 代替案同士の相対的な重要度を各評価基準について提示する. 評価基準 c における代替案 a の相対的な重要度は, 絶対的重要度を用いて $u_{ca} = \alpha_c V(c, a)$ と表現できる. ここで α_c は評価基準 c に依存する定数である. 相対値

u_{ca} は, 次の一対比較行列 W_c から一対比較法により求められる.

$$W_c = \begin{bmatrix} \frac{V(c, a_1)}{V(c, a_1)} & \frac{V(c, a_1)}{V(c, a_2)} & \cdots & \frac{V(c, a_1)}{V(c, a_{|Alt|})} \\ \frac{V(c, a_2)}{V(c, a_1)} & \frac{V(c, a_2)}{V(c, a_2)} & \cdots & \frac{V(c, a_2)}{V(c, a_{|Alt|})} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{V(c, a_{|Alt|})}{V(c, a_1)} & \frac{V(c, a_{|Alt|})}{V(c, a_2)} & \cdots & \frac{V(c, a_{|Alt|})}{V(c, a_{|Alt|})} \end{bmatrix}. \quad (6.11)$$

そして, 得られた相対値を評価行列 A に配列する.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_{|C|} \end{matrix} \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{|Alt|} \end{matrix} & \begin{bmatrix} u_{c_1 a_1} & u_{c_2 a_1} & \cdots & u_{c_{|C|} a_1} \\ u_{c_1 a_2} & u_{c_2 a_2} & \cdots & u_{c_{|C|} a_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{c_1 a_{|Alt|}} & u_{c_2 a_{|Alt|}} & \cdots & u_{c_{|C|} a_{|Alt|}} \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad (6.12)$$

Step2 意思決定者は, ある代替案 $d \in Alt$ を支配代替案として選択する. ある評価基準 c からみたある代替案 a の評価値 u_{ca} は, u_{cd} によって正規化され, 支配代替案の評価値から見た相対値 $u_{ca}^d (= u_{ca}/u_{cd})$ が算出される. 支配代替案の評価値により正規化された評価行列は次のように表現できる.

$$AA_d^{-1}. \quad (6.13)$$

行列 A_d は前章までに用いた対角行列であり, 行列 A の第 d 行の要素を対角にもつ.

Step3 意思決定者は, 支配代替案を d を念頭におき, 評価基準の評価値 (重み) を算出する. 支配代替案 d からみた重みベクトルは次の一対比較行列 W^d から一対比較法により算出する.

$$W^d = \begin{bmatrix} \frac{V(c_1, d)}{V(c_1, d)} & \frac{V(c_1, d)}{V(c_2, d)} & \cdots & \frac{V(c_1, d)}{V(c_{|C|}, d)} \\ \frac{V(c_2, d)}{V(c_1, d)} & \frac{V(c_2, d)}{V(c_2, d)} & \cdots & \frac{V(c_2, d)}{V(c_{|C|}, d)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{V(c_{|C|}, d)}{V(c_1, d)} & \frac{V(c_{|C|}, d)}{V(c_2, d)} & \cdots & \frac{V(c_{|C|}, d)}{V(c_{|C|}, d)} \end{bmatrix}. \quad (6.14)$$

代替案 d からみた評価基準 c の相対的な重要度は $B_c^d = \alpha^d V(c, d)$ と表現できる. ここで α^d は代替案 d に依存する定数である. B_c^d は $b_c^d = \frac{B_c^d}{\sum_{\xi \in C} B_\xi^d}$, $\sum_{c \in C} b_c^d = 1$ と正規化される. 結局, b_c^d が代替案 d からみた評価基準 c の重みは次式で表現できる.

$$b_c^d = \frac{V(c, d)}{\sum_{\xi \in C} V(\xi, d)}. \quad (6.15)$$

Step4 各代替案 a について, 総合評価値 E_a^d を算出する; $E_a^d = \sum_{c \in C} u_{ca}^d b_c^d$. ベクトル表現では, $\mathbf{b}^d = [b_{c_1}^d, b_{c_2}^d, \dots, b_{c_n}^d]^\top$, $\mathbf{E}^d = [E_{a_1}^d, E_{a_2}^d, \dots, E_{a_m}^d]^\top$ としたときに次のように表現できる.

$$\mathbf{E}^d = \mathcal{A} \mathcal{A}_d^{-1} \mathbf{b}^d. \quad (6.16)$$

Step2 と Step3 の正規化により, 支配代替案 d の総合評価値は 1 となる; $E_d^d = 1$.

このように, 支配型 AHP は絶対的重要度を用いて記述できるため, 支配型 AHP と超一対比較行列との間には, ある同値性が存在する.

定理 11. すべての一対比較行列が整合しているならば, 超一対比較行列から算出される総合評価値と, 支配型 AHP で算出される総合評価値は一致する.

証明.

$$E_a^d = \sum_{c \in C} u_{ca} u_{cd}^{-1} b_c^d \quad (6.17)$$

$$= \sum_{c \in C} \frac{\alpha_c V(c, a)}{\alpha_c V(c, d)} \left(\frac{V(c, d)}{\sum_{\xi \in C} V(\xi, d)} \right) \quad (6.18)$$

$$= \frac{1}{\sum_{\xi \in C} V(\xi, d)} \sum_{c \in C} V(c, a). \quad (6.19)$$

$v_{\iota(c, a)} = V(c, a)$, $F = \sum_{\xi \in C} V(\xi, d)$ と置き換えると, この総合評価値は, 式 (6.8) の総合評価値と一致する. $\square$

6.3.1 絶対的重要度を用いた多重支配型 AHP の解釈

意思決定者が他の代替案を支配代替案として選択した場合、異なる支配代替案の元での総合評価値は一般には異なる。このようなシチュエーションで、総合評価値を収斂させ、一意の意思決定を提供するプロセスが多重支配型 AHP であった。

定理 11 とその証明の過程で支配代替案 d の添字が消えることから、支配型 AHP のプロセスで用いるすべての一対比較行列が整合しているならば、 $[\mathbf{E}^{a_1}] = [\mathbf{E}^{a_2}] = \dots = [\mathbf{E}^{a_{|Alt|}}]$ である。

定理 12. もし、すべての一対比較行列が整合しているならば、超一対比較行列を用いて算出される総合評価値は、多重支配型 AHP で算出される総合評価値と一致する。

6.3.2 多重支配型 AHP と超一対比較行列の固有値

多重支配型 AHP の過程で作られる一対比較行列のすべての要素は、超一対比較行列の中へ重なりなく配列することができる。そのため、超一対比較行列の固有値から同値類 $[\mathbf{v}]$ を構成することが期待される。本節では、絶対的重要度ベクトル $\mathbf{v}$ と超一対比較行列の関係を考察する。

ここで、集合 D を多重支配型 AHP において支配代替案となる代替案の集合とする； $D \subseteq Alt$. 未定義 $\perp$ は 0 で置き換えるとする。もし、多重支配型 AHP のすべての一対比較行列が整合しているならば、これら行列のすべての要素を整合している超一対比較行列 R に次のように配列することができる。

$$R = \sum_{c \in C} R_c + \sum_{d \in D} R^d - \sum_{d \in D} \sum_{c \in C} P_{\iota(c,d)}, \quad (6.20)$$

ただし、

$$R_c = \left[\sum_{a \in A} P_{\iota(c,a)} \right] \mathbf{v} \mathbf{v}^\top \left[\sum_{a \in A} P_{\iota(c,a)} \right], \quad (6.21)$$

$$R^d = \left[\sum_{c \in C} P_{\iota(c,d)} \right] \mathbf{v} \mathbf{v}^\top \left[\sum_{c \in C} P_{\iota(c,d)} \right]. \quad (6.22)$$

行列 P_i は, 第 i 行 i 列の要素が 1 で, 他のすべての要素が 0 である行列である. $P_i \mathbf{v} \mathbf{v}^\top P_j$ は, 第 i 行 j 列の要素が r_{ij} で, 他のすべての要素が 0 である行列を表現する.

$$P_i = \begin{matrix} & & i & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \\ i & & & \end{matrix}. \quad P_i \mathbf{v} \mathbf{v}^\top P_j = \begin{matrix} & & j & \\ & & \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & 0 & r_{ij} \\ 0 & & 0 \end{bmatrix} & \\ i & & & \end{matrix}. \quad (6.23)$$

支配型 AHP において, 評価基準 c からみた代替案の一対比較行列 (式 (6.11)) は, 式 (6.21) に対応する. 支配型 AHP において, 支配代替案 d からみた一対比較行列 (式 (6.14)) は, 式 (6.22) に対応する.

この超一対比較行列の固有値と同値類 $[\mathbf{v}]$ との関係について言及する前に, 支配型 AHP が $[\mathbf{v}]$ を構成できることを確認する.

定理 13. もし, すべての一対比較行列が整合しているならば, 支配型 AHP において $[\mathbf{v}]$ を構成できる.

証明. 次を示す.

“ $\forall a \in A, \forall c \in C, \exists s, \exists t, [((\iota(c_1, a_1), s), (\iota(c, a), t))$ は合理的に比較可能である].”

もし, 一対比較行列 W_{c_1} があり, この行列が整合しているならば, 各ペア $((\iota(c_1, a_1), \iota(c_1, a_1)), (\iota(c_1, a_1), \iota(c_1, d)))$ は合理的に比較可能である. そして, もし一対比較行列 W^d があり, この行列が整合しているならば, 各ペア $((\iota(c_1, d), \iota(c, d)), (\iota(c, d), \iota(c, d)))$ は合理的に比較可能である. もし, 一対比較行列 W_c があり, この行列が整合しているならば各ペア $((\iota(c, d), \iota(c, d)), (\iota(c, a), \iota(c, d)))$ は合理的に比較可能である. このペア $((\iota(c_1, a_1), \iota(c_1, a_1)), (\iota(c, a), \iota(c, d)))$ は合理的に比較可能である. $\square$

次の定理も得られる.

定理 14. もし, すべての一対比較行列が整合しているならば, 多重支配型 AHP において $[\mathbf{v}]$ を構成できる.

次に, ベクトル $\mathbf{v}$ が式 (6.20) の行列 R の固有値となるか検証する.

定理 15. 多重支配型 AHP において, もし, 意思決定者がすべての代替案で評価基準を評価し ($D = Alt$), かつ, すべての一対比較行列が整合しているならば, 絶対的重要度ベクトル $\mathbf{v}$ を固有値としてもつ超一対比較行列 R が存在する. この固有ベクトルに対応する固有値は $(|Alt| + |C| - 1)$ である.

証明.

$$\begin{aligned} R\mathbf{v} &= |Alt| \sum_{c \in C} \left[\sum_{a \in A} P_{\iota(c,a)} \right] \mathbf{v} + |C| \sum_{d \in D} \left[\sum_{c \in C} P_{\iota(c,d)} \right] \mathbf{v} - \sum_{d \in D} \left[\sum_{c \in C} P_{\iota(c,d)} \right] \mathbf{v} \\ &= |Alt| \mathbf{v} + (|C| - 1) \sum_{d \in D} \left[\sum_{c \in C} P_{\iota(c,d)} \right] \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (6.24)$$

$P_i \mathbf{v} \mathbf{v}^\top P_j \mathbf{v} = P_i \mathbf{v}$, $\sum_{c \in C} [\sum_{a \in A} P_{\iota(c,a)}] = \mathcal{I}$. ここで, $\mathcal{I}$ は単位行列である.

$D = Alt$ の場合には, 式 (6.24) は次のようになる.

$$R\mathbf{v} = (|Alt| + |C| - 1)\mathbf{v}. \quad (6.25)$$

このベクトル $\mathbf{v}$ が行列 R の固有ベクトルである ($R\mathbf{v} \propto \mathbf{v}$). □

ここまで, 行列が整合している場合のみを扱ってきた. 今, 式 (6.20) において, ある評価基準 c' についての行列 $R_{c'}$ を行列 U で置き換えることを考える. U の主固有値を $\lambda_U \neq |Alt|$, 対応する主固有ベクトルを $\sum_{a \in A} P_{\iota(c',a)} \mathbf{v}'$ とする. ベクトル $\mathbf{v}' = \{v'_1, v'_2, \dots\}$ は, $c = c'$ のとき $v'_{\iota(c,a)} = w_{\iota(c,a)} \neq v_{\iota(c,a)}$ である. $c \neq c'$ のときは $v'_{\iota(c,a)} = v_{\iota(c,a)}$ である. (ベクトル $\mathbf{v}'$ は $\mathbf{v}$ とは $\iota(c', a)$ 番目の要素が異なる.) 固有値は $|Alt|$ ではなく, これは行列 U が整合していないことを意味する. ベクトル $\mathbf{v}'$ は多重支配型 AHP から推定され構築される絶対的重要度である.

一方, 式 (6.20) の置き換えにより, $D = Alt$ を仮定し, 超一対比較行列 R' を構築することができる. このとき, $\mathbf{v}'$ は行列 R' の固有値とはならない. なぜならば,

$$\begin{aligned} R'\mathbf{v}' &= \sum_{a \in A} \left[\lambda_w + \frac{w_{\iota(c',a)}}{v_{\iota(c',a)}} \right] P_{\iota(c',a)} \mathbf{v}' + (|Alt| + |C| - 1) \sum_{c \neq c', c \in C} \sum_{a \in A} P_{\iota(c,a)} \mathbf{v}' \\ &\quad - \mathbf{v}' \end{aligned} \quad (6.26)$$

となり, $R'\mathbf{v}'$ は $\mathbf{v}'$ に比例しない.

6.4 考察

本章では、支配型 AHP のすべての一対比較行列が整合している極端な場合について、超一対比較行列から算出される総合評価値と、支配型 AHP の総合評価値が一致することを示した (定理 11, 定理 12).

超一対比較行列は、意思決定システム AHP を抽象化し一つの行列で表現したものと解釈できる. この行列のすべての要素は、比という一つの意味をもつ. 添字の 1 対 1 対応 l (式 (6.2)) は、代替案と評価基準の並びにより生じる違いを吸収した. これにより、意思決定者は、評価基準と代替案の特殊な構造を無視できる. そのため、意思決定者は、同値類 $[v]$ を、比のみから構成される超一対比較行列を用いて構成することができる. そして、それが可能となる条件を合理的に比較可能という表現を用いて記述した.

こまでに、大屋と木下 [12][13] は、支配型 AHP と超一対比較行列について、総合評価値が異なる場合があることを指摘していた (彼らは、整合していないデータセットを用いてそれを示した). その不一致の原因は、支配型 AHP で用いる行列の大きさと、超一対比較行列の大きさの違いからも生じていると考えられる. 行列 W を、整合している一対比較行列とし、ベクトル $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^\top$ をこの行列の主固有ベクトルとする; $W\mathbf{x} = n\mathbf{x}$, $W = (w_{ij})$, $w_{ij} = \frac{x_i}{x_j}$. ここで、誤差 ε (< 1) を、行列の要素 w_{n1} に加算する.

$$W' = \begin{bmatrix} \frac{x_1}{x_1} & \frac{x_1}{x_2} & \dots & \frac{x_1}{x_n} \\ \frac{x_2}{x_1} & \frac{x_2}{x_2} & \dots & \frac{x_2}{x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{x_n}{x_1} + \varepsilon & \frac{x_n}{x_2} & \dots & \frac{x_n}{x_n} \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

$W'\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$ を満たすベクトル $\mathbf{y}$ は次のようになる.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}, \quad y_i = \begin{cases} \frac{1}{\mu} x_i & i \neq n \\ \frac{1}{\mu} x_n + \frac{\varepsilon}{\mu^2} x_1 & i = n \end{cases}, \quad \mu = \frac{n + \sqrt{n^2 + 4w_{1n}\varepsilon}}{2}. \quad (6.28)$$

要素 x_n と y_n との差は、 n の大きさに関わらず、誤差 ε の平方根のオーダーで抑えられる

($\because \varepsilon < n$). しかし、元の行列が整合していない $W \neq \mathbf{x}\mathbf{x}^\top$ 場合には、固有ベクトルの特性方程式が n 次元であることから、この誤差 ε は $\varepsilon^{\frac{1}{n}}$ のオーダーの影響を固有値と固有ベクトルに及ぼす。このことは、もし $\varepsilon < 1$ ならば、 n が大きくなるほど $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の差が大きくなることを示している。

意思決定者は、すべての代替案から評価基準を評価し、その評価が整合していれば、絶対的重要度を固有値法で得ることができる (定理 15)。一方、このように、すべての代替案で評価を行うことは意思決定者にとって大きな負担となる。しかし、比較の整合性を仮定すれば、次のように、既知の要素 $r_{\iota(c,a) \iota(c,d)}, r_{\iota(c,d) \iota(c',d')}, r_{\iota(c',d') \iota(c',a')}$ から、未知の要素を推定することができる。

$$r_{\iota(c,a) \iota(c',a')} = r_{\iota(c,a) \iota(c,d)} \cdot r_{\iota(c,d) \iota(c',d')} \cdot r_{\iota(c',d') \iota(c',a')}. \quad (6.29)$$

絶対的重要度を関数で表現すること次のようになる。

$$\frac{V(c,a)}{V(c',a')} = \frac{V(c,a)}{V(c,d)} \cdot \frac{V(c,d)}{V(c',d')} \cdot \frac{V(c',d')}{V(c',a')}. \quad (6.30)$$

$\frac{V(c,a)}{V(c',a')}$ が未知の要素とする。右辺の $\frac{V(c,a)}{V(c,d)}$ は評価基準 c からみた代替案 a と d の評価値の相対値である。 $\frac{V(c,d)}{V(c',d')}$ は代替案 d からみた評価基準 c と c' の評価値の相対値である。 $\frac{V(c',d')}{V(c',a')}$ は評価基準 c' からみた代替案 d と a' の評価値の相対値である。

$D = Alt$ で超一対比較行列が整合しているときの固有値が $|Alt| + |C| - 1$ であることから (定理 15), 超一対比較行列の整合性を示す指標を考えることができる。整合していない一対比較行列の固有値を λ とすると、ある関数 err を用いて $err(\lambda, |Alt| + |C| - 1, |C||Alt|)$ で整合性を測ることができる。

先に言及したように、超一対比較行列では、評価基準と代替案の間に特別な構造が存在せず、すべての要素が同じセマンティクスをもっている。そこで、この超一対比較行列を機械的に拡張することが考えられる。例えば、超一対比較行列の組を R_i ($i = 1, 2, \dots, N$) とする。各 R_i について、代替案の集合に相当するものを Alt_i , 評価基準に集合に相当するものを C_i とする。すると、これら超一対比較行列を、1 対 1 対応 ι を改良することによ

り, さらに巨大な超一対比較行列の中に配列することができる.

$$\iota' : C_1 \times \cdots \times C_N \times Alt_1 \times \cdots \times Alt_N \rightarrow I_{|C_1| \cdots |C_N| |Alt_1| \cdots |Alt_N|}. \quad (6.31)$$

絶対的重要度は, 合理的に比較可能な範囲で要素の評価値 (の比) を提示することにより算出することができる. このような再帰的な意思決定システムの構成は, 比を機械的に求めることができるという仮定の上で, 自動化への応用が期待される.

第 7 章

結論

本研究では、まず、支配型 AHP において、支配代替案が複数提示された場合 (多重支配型 AHP) の重みベクトルの総合評価値の統合の可能性を、互換性という概念で表現した。そして、この互換性を定式化し、分析した。その結果得られた定理が定理 2 である。この定理が本研究で中心となる結果であり、この定理を足掛かりとして、以降の研究を進めていった [10]。

その中で、評価行列の階数が重要な指標となることがわかり、階数が最大 ($\text{rank}(A) = n$) のときに、支配型 AHP が特別な構造をもつことが明らかとなった (定理 3, 定理 4, 定理 5)。AHP/ANP と支配型 AHP との同値性についても、この階数が最大の場合に両者の総合評価値が一致することを示すことができた。

CCM は、階数が最大の場合に n 次元ベクトルの最適化問題として再定義でき、解の収束の様子や、正規化という手続きがもつ本質的な複雑さを確認することができた [7]。

超一対比較行列は、支配型 AHP で用いるすべての一対比較行列をひとつの巨大な行列の中に配列したものである。代替案と評価基準の配置によって複数の表現が考えられてきたが、本研究では、それらの表現を、要素の添字を表す $\iota(a, c)$ という 1 対 1 関数で抽象化することにより、表現の違いから生じる分析の複雑さを吸収した。

超一対比較行列については、本研究では、絶対的重要度の同値類を用いる表現を提案した。また、すべての代替案が支配代替案として想定されるという極端な場合について、支配

型 AHP から提示される結果と、超一対比較行列から提示される結果が一致することを示した。具体的には、両者から構築される絶対的重要度の同値類が一致することを示した。同時に、その極端な場合でなければ、両者が算出する総合評価値が一致しないことも示した。

本研究で得られた新たな知見、表現、定理等は、今後の AHP の数学的分析の研究において、重要なツールとなることが期待される。

7.1 今後の課題

AHP は、階層構造の提示、要素の評価、評価値の合成 という 3 つの手続きから構成される。本研究では、これらのうち、特に評価値の合成に注目し、AHP を表現してきた。そのため、解析の対象となる演算はベクトルの線形結合とその正規化が中心であった。複数の評価値の、このような合成は自然であり、この合成のフェーズの妥当性については意思決定者の納得と合意は得られやすいと考えられる。

しかし、意思決定者が直接的に触れる部分は、階層構造の提示と要素の評価である。特に、要素の評価の中心的手続きとなる一対比較法の演算についての妥当性は、必ずしも自明ではない。本論文では、固有値法により一対比較行列から評価値が算出する方法のみを述べたが、評価の誤差の対数を最小にする幾何平均法により算出する方法も提案されている。前者は均衡モデルから、後者は対数誤差モデルから構築された手法である。要素数が 4 以上の場合には、両者の結果が異なり、いずれかを選択しなければならない。実は、2 つの手法以外にも一対評価行列から評価値を算出する手法が提案されており、どのような条件のときにどの手法を選択すればよいのか、決定的な指針はない。そこで、この要素の評価のフェーズに注目し、まず一対比較行列そのものを数学的对象として扱い、分析を進めていきたい。その一環として、著者らは、整合している一対比較行列について、そのレゾルベントを導出した [22]。

階層構造の提示についても、本論文では基本的な 3 層構造のみを対象に議論を進めてきた。意思決定の問題の構造の種類によっては、単純な階層構造ではない方が AHP を適用しやすいと考えられる。そこで、著者らは、最下層の代替案がカテゴリに分かれる場合につ

いて, AHP と支配型 AHP の分析を行った [9]. このように, 基本的な階層構造よりは複雑ではあるが, 意思決定者が問題の適用を行いやすい構造における AHP についても研究を進めていきたい.

AHP では, 代替案の数が多くなると, 要素同士の比較の回数が爆発的に増加する. そこで AHP では, 代替案同士ではなく, 代替案とは別に用意される絶対的な基準との比較により評価を行う方法が提案されている [15][25]. 著者らは, 支配型 AHP の枠組みからこの手法を分析することを行っているが [8], 代替案の外に用意される絶対的な基準が, 物理的な計量と代替できることから, AHP の中に物理モデルを組み込むことができないかと期待し, その手法についての研究を進めている.

超一対比較行列はすべての比較を比という同一のセマンティクスで扱う, 表現の同相性に最も高い価値がある. この同相性より, 本論文では, 再帰的な構成とシステムの自動化についてのアイデアを示唆した [21]. この意思決定システムの自動化についての研究も進めていきたい.

参考文献

- [1] Belton, V. and Gear, T.: On a Shortcoming of Saaty's Method of Analytic Hierarchies, *OMEGA The Int. J. Management Science*, Vol. 11 (1983), 228–236.
- [2] Herbert, A.: *The New Science of Management Decision*, Harper, 1960.
- [3] Kinoshita, E.: A Comparison of Dominant AHP/CCM and AHP/ANP, *Advances in Intel. Decision Technologies, SIST*, Vol. 4 (2010), 75–89.
- [4] Kinoshita, E. and Nakanishi, M.: Proposal of New AHP Model in light of Dominant Relationship among Alternatives, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 42 (1999), 180–197.
- [5] Kinoshita, E., Sekitani, K. and Shi, J.: Mathematical Properties of Dominant AHP and Concurrent Convergence Method, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, Vol. 45 (2002), 198–213.
- [6] Kinoshita, E. and Sugiura, S.: The Relationship between Dominant AHP/CCM and ANP, *Intelligent Decision Technologies, SIST 10*, (2011), 319–328.
- [7] Mizno, T. and Kinoshita, E.: Concurrent Convergence Techniques for Dominant AHP in Full Rank Condition (評価値行列が最大階数を持つ場合の一斉法について), *Journal of Japanese Symposium on The Analytic Hierarchy Process*, (2012), 41–48.
- [8] Mizuno, T. and Kinoshita, E.: An Analysis of Extended Absolute Measurement Method and Dominant Standard Method, *Intelligent Decision Technologies*, (2013), 58–64.

- [9] Mizuno, T. and Kinoshita, E.: Dominant Approaches of Synthesizing Scores in AHP with its Alternatives Categorized, *Smart Digital Futures*, (2014), 149–154.
- [10] Mizuno, T., Sugiura, S. and Kinoshita, E.: Convergence Properties of Criteria Weights of Dominant AHP with Solving Equations of Interchangeability, *Intelligent Decision Technologies*, Vol. 1, SIST 15 (2012), 437–445.
- [11] Ohya, T. and Kinoshita, E.: Proposal of Super Pairwise Comparison Matrix, *Intelligent Decision Technologies*, Vol. SIST 10 (2011), 247–254.
- [12] Ohya, T. and Kinoshita, E.: Super Pairwise Comparison Matrix with the Logarithmic Least-Squares Method, *Intelligent Decision Technologies*, (2013), 390–398.
- [13] Ohya, T. and Kinoshita, E.: Super Pairwise Comparison Matrix with the Logarithmic Least-Squares Method, *Intelligent Decision Technologies*, (2013), 390–398.
- [14] Saaty, T.: *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, 1980.
- [15] Saaty, T.: Absolute and relative measurement with the AHP. The most livable cities in the United States, *Socio-Economic Planning Sciences*, Vol. 20 (1986), 327–331.
- [16] Saaty, T.: Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process, *Management Science*, Vol. 33 (1986), 841–855.
- [17] Saaty, T.: *The Analytic Network Process*, Expert Choice, 1996.
- [18] Saaty, T. L.: A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical psychology*, Vol. 15 (1977), 234–281.
- [19] Saaty, T. and Vargas, L.: Comparison of Eigenvalue, Logarithmic Least Squares and Least Square Methods in Estimating Ratios, *Mathematical Modeling*, Vol. 5 (1984), 309–324.
- [20] Sekitani, K. and Ueta, H.: Remarks on the Concurrent Convergence Method for a Typical Mutual Evaluation System, *Journal of the Operations Research Society*

of Japan, Vol. 47 (2004), 82–95.

- [21] 水野隆文, 木下栄蔵：一対比較行列から超一対比較行列への再帰的構成について, 日本 OR 学会秋季研究発表会予稿集, Vol. 32 (2013), 126–127.
- [22] 水野隆文, 木下栄蔵：整合一対比較行列のレゾルベント, 都市情報学研究, Vol. 18 (2013), 35–38.
- [23] 大屋隆生, 木下栄蔵：誤差モデルに基づく幾何平均一斉法の提案, 日本 OR 学会春季研究発表会予稿集, (2008), 202–203.
- [24] 日本 OR 学会：多重支配代替案法における超一対比較行列, 春季研究発表会予稿集, 2012.
- [25] 木下栄蔵：拡張 AHP 手法を利用したリニューアルのコストベネフィット分析, オペレーションズ・リサーチ：経営の科学, Vol. 40 (1995), 411–416.
- [26] 木下栄蔵（編）：AHP の理論と実際, 日科技連, 2000.
- [27] 木下栄蔵（編）：戦略的意思決定法, 日科技連, 2013.
- [28] 木下栄蔵, 大屋隆生：戦略的意思決定手法 AHP, 朝倉書店, 2007.
- [29] 木下栄蔵, 中西昌武：AHP における新しい視点の提案, 土木学会論文集, Vol. IV-36 (1997), 1–8.
- [30] 木下栄蔵, 中西昌武：支配代替案法における追加データの処理手法「一斉法」の提案, 土木学会論文集, Vol. IV-42 (1999), 13–19.

謝辞

本研究をご指導いただいた名城大学大学院都市情報学部 木下栄蔵 教授に多大なる感謝の意を表します。同教授からは、的確で本質をついたご助言を賜りました。

本論文の審査委員 (副査) として、ご指導、ご助言を賜りました名城大学大学院都市情報学研究科 亀井栄治教授、宇野隆教授、山谷克教授に心より感謝いたします。