

氏 名	伊 藤 健太郎
国 籍 ・ 本 籍	愛知県
学 位 の 種 別	博士 (理学)
学 位 の 番 号	甲第252号
学位授与の日付	平成28年 3 月18日
学位授与の要件	名城大学学位規程第 3 条第 3 項該当
学位論文題目	de la Vallée Poussin 平均による重み付き 多項式近似およびその微分の評価
論文審査委員	主 査 鈴 木 紀 明 副 査 土 田 哲 生 副 査 齊 藤 公 明

論 文 内 容 の 要 旨

本論文の主題は実軸上の関数の重み付き多項式近似である. 多項式近似に関するもっともよく知られている事実としては, 実軸内の有界閉区間上の連続関数は適当な多項式で任意の精度で一様近似ができるという Weierstrass の多項式近似定理が有名であろう. その一方で, これを実軸全体へと拡張することは可能なのであろうか? 一般に, 多項式は無限遠点で正または負の無限大に発散するため, そのままでは実軸全体で関数の近似を扱うことは出来ない. これを解消するために, 多項式が正または負の無限大に発散するよりも早く無限遠点で 0 に収束するような適当な関数の「重み」を乗じて近似を考える必要がある.

本論文では, 重み w は $Q(x) := -\log(w(x))$ が $\mathcal{F}(C^2+)$ と呼ばれるクラスに属するものを扱う. $\mathcal{P}_n$ を高々 n 次の多項式全体として, $1 \leq p \leq \infty$ と $f w \in L^p(\mathbb{R})$ に対して

$$E_{p,n}(w; f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|(f - P)w\|_{L^p(\mathbb{R})}$$

とおく. このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E_{p,n}(w; f) = 0$$

であることが知られている(但し $p = \infty$ のときは $f w$ は連続かつ無限遠点で 0 に収束することも仮定する). これより,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f - P_n)w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad \cdots (1)$$

となる多項式の列 $\{P_n\}$ が存在することはわかるが、一般にそれを具体的に求めるのは容易ではない。
重み $w(x) = \exp(-Q(x)) \in \mathcal{F}(C^2 +)$ に対して、

$$T(x) := \frac{xQ'(x)}{Q(x)}$$

とおく。この T が有界な w を Freud 型, 非有界な w を Erdős 型という。Freud 型の重みに関して Mhaskar らは次を示した: ある定数 $C = C(w, p) \geq 1$ が存在して

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CE_{p,n}(w; f). \quad \cdots (2)$$

ここで, $v_n(f)$ は f に関する de la Vallée Poussin 平均で, 次で定まる高々 $2n-1$ 次の多項式である。

$$v_n(f)(x) := \frac{1}{n} \sum_{m=n+1}^{2n} s_m(f)(x).$$

但し, $s_m(f)(x)$ は w より定まる直交多項式系に関する f の $m-1$ 次 Fourier 部分和である。

本論文の主結果は(2)を Erdős 型まで拡張した次の評価である: $w \in \mathcal{F}(C^2 +)$ はある定数 $c > 0$ に対して $T(a_n) \leq c(n/a_n)^{2/3}$ をみたすとする。ここで a_n は

$$n = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{a_n u Q'(a_n u)}{\sqrt{1-u^2}} du$$

で定まる定数であり, n 次の MRS 数と呼ばれる。このとき, ある定数 $C = C(w, p) \geq 1$ が存在して, $fw \in L^p(\mathbb{R})$ なる任意の関数 f に対して

$$\|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CT^{1/4}(a_n)E_{p,n}(w; f), \quad \cdots (3)$$

さらに, f が絶対連続で $f'w \in L^p(\mathbb{R})$ ならば

$$\|(f' - v_n(f)')w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq CT^{3/4}(a_n)E_{p,n-1}(w; f') \quad \cdots (4)$$

が成り立つ。

これらの証明で重要なことは de la Vallée Poussin 平均の L^p 有界性である。 $fw \in L^p(\mathbb{R})$ ならば

$$\left\| v_n(f) \frac{w}{T^{1/4}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|fw\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad \cdots (5)$$

また, $T^{1/4}fw \in L^p(\mathbb{R})$ なる任意の関数 f に対して

$$\|v_n(f)w\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|T^{1/4}fw\|_{L^p(\mathbb{R})} \quad \cdots (6)$$

が成り立つ。(5)と(6)の証明の流れは, まずは(5)と(6)の両者の $p = \infty$ の場合を示し, それを用いて L^p に関する双対性から $p = 1$ の場合を示す。これらより Riesz-Thorin の補間定理からすべての $1 \leq p \leq \infty$ に関して成立が導かれる。これらより(3)が示され, (3)を用いて(4)が得られる。

さらに, (5)と(6)に対応する de la Vallée Poussin 平均の微分に関する評価も示すことが出来た。この証明のところどころには, w に T のべき乗がかかったものが頻出するが, w が $\mathcal{F}(C^2 +)$ にある条件を付加した $\mathcal{F}_\lambda(C^4 +)$ と呼ばれる集合に属する場合に, 重みの mollification を用いて次の評価が得られた: w は $\mathcal{F}_\lambda(C^4 +)$ に属し, かつ k は 2 以上の自然数とし, $0 < \lambda < (k+3)/(k+2)$ をみたすとする。このとき, $fw \in L^p(\mathbb{R})$ なる任意の関数 f 及び任意の $1 \leq j \leq k$ に対して

$$\left\| v_n(f)^{(j)} \frac{w}{T^{(2j+1)/4}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \left(\frac{n}{a_n} \right)^j \|fw\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

また, $T^{(2j+1)/4}fw \in L^p(\mathbb{R})$ なる任意の関数 f に対して, $2 \leq p \leq \infty$ のときは

$$\left\| v_n(f)^{(j)} w \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \left(\frac{n}{a_n} \right)^j \|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

$1 \leq p \leq 2$ のときは

$$\left\| v_n(f)^{(j)} w \right\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \left(\frac{n}{a_n} \right)^j a_n^{(2-p)/(2p)} \|T^{(2j+1)/4}fw\|_{L^2(\mathbb{R})}$$

が成り立つ. この評価の証明では mollification の他に, Markov-Bernstein 不等式の一般化と直交多項式系の部分和より定義される Christoffel function の微分の評価が重要な役割を果たす.

最後に, de la Vallée Poussin 平均が(1)をみたす具体的な多項式であること, すなわち,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f - v_n(f))w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \quad \dots (7)$$

は w が Erdős 型に対してはどのような条件のもとで成立するかを注意する. 一般に(3), (4)の右辺は 0 に収束するとは限らないが, 本論文では(7)が成立するための条件を 2 通り見出した. 一つ目は w が $\mathcal{F}_\lambda(C^3 +)$ に属する場合は mollification を利用することですべての $T^{1/4}fw \in L^p(\mathbb{R})$ について(7)が示される. また, $w \in \mathcal{F}(C^2 +)$ であっても f が $\mathbb{R}$ 上の任意の有界閉区間で絶対連続で $f'w \in L^p(\mathbb{R})$ である場合にも(7)は成立する. さらに, $f''w \in L^p(\mathbb{R})$ であれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(f' - v_n(f)')w\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$$

が成り立つ. この結果は f が滑らかであれば de la Vallée Poussin 平均の列の微分が元の関数 f の導関数 f' に対しても近似列を与えていることを意味している.

論文審査の結果の要旨

本論文は、実軸上で定義された関数の多項式による近似についての研究である。一般の関数の性質をよく知られた関数の近似から導く場合には近似の誤差評価が重要であるが、多項式は非有界のため、近似誤差は適切な重みを付けて考察する必要がある。重みは無限遠点での挙動の緩急により Freud 型と Erdos 型に分類されるが、これまでの研究は取り扱いの容易な Freud 型に対するものが主であった。申請者の研究は Erdos 型の重みへの拡張と精密化への挑戦であり、具体的には (1) 近似多項式として de la Vallee Poussin 平均 (以下、VP 平均と略記) を用いたときの精密な誤差評価、(2) VP 平均の導関数の p 乗ノルム有界性、(3) 絶対連続な関数の多項式近似列の構成、などに関して興味深い成果を得ることに成功した。

本論文は 5 章から構成されている。第 1 章では論文の目的と概要が述べられるとともに、これまでの実軸上の多項式近似理論の発展の歴史が要領よくまとめられている。第 2 章は 3 章以降の議論のための準備である。重みのクラスの正確な定義といくつかの記号の説明があり、MRS 数や直交多項式に関する基本的性質が整理されて書かれている。第 3 章は上述の (1) についての詳細である。区間を巧みに分割しての積分評価により、既知の結果において課されていた重みの条件を緩和しただけでなく、ノルム評価自体の精密化にも成功している。第 4 章は (2) についてまとめられている。得られた結果の証明の方針は従来のもにに従っているが、重みの軟化の使用と Christoffel 関数の微分の評価が新たなアイデアで、これらにより Erdos 型の場合を含めた議論が可能になっている。第 5 章では前 2 章の結果を利用して、絶対連続関数が多項式で近似されている場合の導関数同士の近似誤差を評価している。Jackson-Favard 型不等式の利用が重要な役割を演じ、さらに、定理の証明に使われる p 乗ノルムの双対性に関する等式の議論も詳細に書かれている。結果として、ある条件のもとでは、絶対連続関数の VP 平均が定める多項式近似列は、その微分が導関数の近似列にもなっている事実を示すことに成功した。3 章から 5 章の内容は査読付き専門誌に掲載および掲載予定の 3 編の論文に基づいて書かれており、数学的に新たな知見を提供する学術的価値のある内容である。

本論文は、学位論文としての条件を備えていると評価できる。従って、学位を授与することを妥当なものと判断する。